Examen : Séries Temporelles Multivariées

Gilbert Colletaz

6 mai 2021 - Durée 3 heures

- **Sans document, excepté les tables statistiques et calculatrice simple.**
- **Toute réponse doit être justifiée : pas de justification = pas de point**

Vrai ou Faux ?

Après les avoir lues attentivement, répondez par vrai ou faux aux propositions suivantes (inutile de justifier votre réponse) :

1. Soit deux séries I(1). On sait qu'il n'existe pas de causalité selon Granger entre ces deux séries. Dans ces conditions, elles ne sont pas cointégrées.
2. Dans un VAR d'écriture $y_t = B_1 y_{t-1} + B_2 y_{t-2} + B_3 y_{t-3} + u_t$, où u_t est un processus en bruit blanc, si le déterminant de $(I - B_1 - B_2 - B_3)$ a ses racines en dehors du cercle complexe unitaire, le VAR est stationnaire.
3. Soit un système composé de k variables et modélisé par un VAR d'ordre p. Si on trouve p relations de cointégration alors les variables sont toutes I(0).
4. Dans un VAR d'écriture $y_t = A_1 y_{t-1} + A_2 y_{t-2} + \ldots + A_p y_{t-p} + u_t$, le rang de l'espace de cointégration est égal au rang de $(I - A_1 L - A_2 L^2 - \ldots - A_p L^p)$.
5. Soit $y_t = (y_{1t}, y_{2t})^\top$. On pense que ce vecteur est gouverné par un VAR d'ordre 2 d'écriture $y_t = A_1 y_{t-1} + A_2 y_{t-2} + u_t$. Ce VAR est stable si les valeurs propres de
$$\begin{pmatrix} I & A_1 & A_2 \\ I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \end{pmatrix}$$
où I est la matrice identité 2×2, sont à l'intérieur du cercle complexe unitaire.
6. Soit un vecteur y_t de dimension k obéissant à l'écriture : $y_t = (C_1 L + C_2 L^2 + \ldots + C_p L^p) y_t + c + u_t$, où u_t est un bruit blanc de matrice de variance-covariance Σ_u. S'il n'existe que de la causalité instantanée entre les composantes de y_t alors les matrices $C_i, i = 1, \ldots, p$ sont diagonales.

Exercices

Exercice 1

On considère deux variables, x et y gouvernées par le modèle suivant :

$$x_t = 0.5y_t + 0.8x_{t-1} - 0.4y_{t-1} + \epsilon_{xt} \quad (1)$$
$$y_t = 0.4x_{t-1} + 0.4y_{t-1} + \epsilon_{yt} \quad (2)$$

où les variables ϵ_{xt} et ϵ_{yt} sont deux bruits blancs gaussiens indépendants entre eux, de variance respectives $\sigma_1^2 = 1$ et $\sigma_2^2 = 4$.

1. Donnez l'écriture VAR correspondant à ce modèle et respectant l'ordre d'entrée correspondant à ces équations, à savoir x en première variable et y en deuxième.
2. Quelle est la matrice des corrélations des innovations de ce VAR ?
3. Le VAR en question est-il stable ?
4. On va maintenant étudier les réponses de la variable y aux chocs d'innovation orthogonaux. Rappelez en deux ou trois lignes la raison qui explique le passage à ces chocs.
5. Donnez les deux premiers coefficients des fonctions de réponse de y à ces deux chocs.
6. Quelle est la variance des erreurs de prévisions commises sur y pour des horizons de prévisions égaux à une et deux périodes de temps ?
7. Décomposer les variances à ces deux horizons afin de faire apparaître, pour la variable y, la contribution de chaque choc ?
8. Commentez le résultat précédent notamment pour l'horizon d'une période. Est-il justifié compte-tenu du modèle gouvernant les deux variables ?
9. Quelle est l'écriture de Dickey-Fuller du système. Pouvez-vous, à partir de celle-ci confirmer la réponse que vous avez donnée en ce qui concerne la stabilité du VAR ?

Exercice 2

On considère deux variables stationnaires x et y telles que y ne cause pas x au sens de Granger. On a demandé à deux de vos camarades de fournir des prévisions pour $T+1, T+2, \ldots, T+h$, et cela sans qu'ils connaissent l'information précédente sur la causalité. Plutôt que d'utiliser un logiciel existant, ils ont programmé chacun de leur côté l'estimation d'un VAR puis ont utilisé les résultats de leurs ajustements, obtenus sur un échantillon de taille T, pour construire ces prévisions. Le premier étudiant a entré les variables dans l'ordre x, y, alors que le second a utilisé l'ordre y, x.

S'apercevant que leurs prévisions diffèrent, ils viennent vous consulter pour obtenir un conseil. On va considérer deux cas de figure :

1. premier cas : vous savez, vous, que y ne cause pas x. Auquel allez-vous faire confiance, et pourquoi ?
2. second cas : vous ne savez pas, vous non plus, que y ne cause pas x. Cela modifie-t'il votre réponse précédente ? Et en quoi ?

Exercice 3

Dans un de ses travaux Johansen étudie l'éventuelle relation existant entre la température, T, et le niveau des océans, h, sur la période 1881-1995 (données annuelles). Dans ce qui suit on note de manière habituelle r le rang de la matrice Π dans l'écriture suivante, où $X_t = (h_t, T_t)'$:

$$\Delta X_t = \Pi X_{t-1} + \Gamma \Delta X_{t-1} + \mu + \epsilon_t$$

Un des premiers tableaux de résultats présentés est le suivant :

r	valeur propre	Statistique de Trace	Valeur critique à 95%	SL
0	0.168	20.76	15.41	0.005
1	0.003	0.36	3.84	0.54

Par la suite il présente les résultats d'estimations suivants (écart-types estimés entre parenthèses) :

$$\begin{aligned}
\Delta h_t &= \underset{(4.82)}{4.15}(T_{t-1} - \underset{(0.00042)}{0.0031}\, h_{t-1}) - \underset{(0.090)}{0.2805}\Delta h_{t-1} + \underset{(5.067)}{3.04}\,\Delta T_{t-1} + \underset{(0.625)}{2.22} + \hat{\epsilon}_{h,t} \\
\Delta T_t &= -\underset{(0.094)}{0.40}\,(T_{t-1} - \underset{(0.00042)}{0.0031}\, h_{t-1}) - \underset{(0.0017)}{0.0024}\Delta h_{t-1} - \underset{(0.098)}{0.053}\Delta T_{t-1} - \underset{(0.012)}{0.023} + \hat{\epsilon}_{T,t}
\end{aligned}$$

1. Quelle(s) conclusion(s) tirez-vous du tableau précédent ?
2. Donnez un exemple d'une valeur de la statistique de trace telle que l'hypothèse de stationnarité jointe des 2 séries n'aurait pas été rejetée au seuil de risque de 5%.
3. Soit $\hat{\Pi}$ l'estimation de Π. Pouvez-vous donner sa valeur ?
4. Comment peut-on justifier le choix des deux équations qui ont été estimées, et quels en sont les enseignements ?

Barème

Vrai ou Faux : 3 points (réponse bonne=+1/2, mauvaise=-1/2, absente=0)
Exercice 1 = 11 points (1+1+1+1+1+2+1+1+2)
Exercice 2 = 2 points (1+1)
Exercice 3 = 4 points (1+.5+1+1.5)