Correction : Séries Temporelles Multivariées

Gilbert Colletaz

épreuve du 6 mai 2021

Vrai ou Faux ?

1. Vrai
2. Faux
3. Faux
4. Faux
5. Faux
6. Vrai

Exercices

Exercice 1

1. On a :

$$\begin{aligned} x_t &= 0.5(0.4x_{t-1} + 0.4y_{t-1} + \epsilon_{yt}) + 0.8x_{t-1} - 0.4y_{t-1} + \epsilon_{xt} \\ y_t &= 0.4x_{t-1} + 0.4y_{t-1} + \epsilon_{yt} \end{aligned}$$

soit :

$$\begin{aligned} x_t &= 0.5(0.4x_{t-1} + 0.4y_{t-1} + \epsilon_{yt}) + 0.8x_{t-1} - 0.4y_{t-1} + \epsilon_{xt} \\ y_t &= 0.4x_{t-1} + 0.4y_{t-1} + \epsilon_{yt} \end{aligned}$$

et finalement :

$$\begin{aligned} x_t &= x_{t-1} - 0.2y_{t-1} + 0.5\epsilon_{yt} + \epsilon_{xt} \\ y_t &= 0.4x_{t-1} + 0.4y_{t-1} + \epsilon_{yt} \end{aligned}$$

2. La matrice de covariance des innovations du VAR est :

$$\begin{aligned} \Sigma &= \begin{pmatrix} var(0.5\epsilon_{yt} + \epsilon_{xt}) & cov(0.5\epsilon_{yt} + \epsilon_{xt}, \epsilon_{yt}) \\ cov(0.5\epsilon_{yt} + \epsilon_{xt}, \epsilon_{yt}) & var(\epsilon_{yt}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2.0 & 2.0 \\ 2.0 & 4.0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ce qui donne la matrice de corrélation suivante :

$$\begin{pmatrix} 1.0 & 0.707 \\ 0.707 & 1.0 \end{pmatrix}$$

3. On sait que le VAR s'écrit :

$$
\begin{aligned}
x_t - x_{t-1} + 0.2y_{t-1} &= u_{xt} \\
y_t - 0.4x_{t-1} - 0.4y_{t-1} &= u_{yt} \\
&\Leftrightarrow \\
\begin{bmatrix} 1-L & 0.2L \\ -0.4L & 1-0.4L \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} u_{xt} \\ u_y t \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Pour que le VAR soit stable il faut que la matrice entre [] soit inversible, i.e. que son déterminant ait des racines à l'extérieur du cercle complexe unitaire.
Ce déterminant est égal à $(1-L)(1-0.4L)+0.08L^2 = 1-1.4L+0.48L^2$. Ses racines sont égales à 1.67 et 1.25. Il est donc stable.

4. Si les innovations du VAR ne sont pas orthogonales, ce qui est le cas ici, alors en modifiant l'une on modifie simultanément l'autre. Il est donc impossible d'étudier la réponse du système à un seul choc bien identifié.

5. On sait que ces fonctions de réponse sont tirées de l'écriture VMA sur les chocs orthogonaux. Soient v ces derniers, on a $u_t = Pv_t$ où P est une matrice triangulaire inférieure inversible, à éléments positifs sur la diagonale, et telle que $PP^\top = \Sigma_u$. Connaissant Σ_u, on trouve P :

$$
P = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}
$$

L'écriture VMA cherchée est donc :

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} 1-L & 0.2L \\ -0.4L & 1-0.4L \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} u_{xt} \\ u_y t \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{1-1.4L+0.48L^2} \begin{bmatrix} 1-0.4L & -0.2L \\ 0.4L & 1-L \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_{xt} \\ u_y t \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{1-1.4L+0.48L^2} \begin{bmatrix} 1-0.4L & -0.2L \\ 0.4L & 1-L \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{1t} \\ v_{2t} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Comme la question porte sur la réponse de y, il suffit d'étudier la deuxième équation du VMA et de prendre les deux premiers coefficients des polynômes afférents respectivement à v_{1t} et v_{2t}, soit :

$$
\begin{aligned}
y_t &= \frac{(\sqrt{2}-0.6\sqrt{2}L)}{1-1.4L+0.48L^2} v_{1t} + \frac{(\sqrt{2}-\sqrt{2}L)}{1-1.4L+0.48L^2} v_{2t} \\
&= (\sqrt{2}+0.8\sqrt{2}L+\ldots)v_{1t} + (\sqrt{2}+0.4\sqrt{2}L+\ldots)v_{2t} \\
&= (1.414+1.131L+\ldots)v_{1t} + (1.414+0.566L+\ldots)v_{2t}
\end{aligned}
$$

6. D'après la dernière équation, l'erreur de prévision commise sur y_t à un horizon de une période est égale à $\sqrt{2}v_{1t}+\sqrt{2}v_{2t}$; celle à deux périodes est donnée par $\sqrt{2}v_{1t}+0.8\sqrt{2}v_{1t-1}+\sqrt{2}v_{2t}+0.4\sqrt{2}v_{2t-1}$. Les innovations v_1 et v_2 étant orthogonales entre elles et de variance unitaire, les variances cherchées sont donc respectivement de 4 et 5.60

7. D'après les réponses à la question précédente, il vient immédiatement :

horizon	variance totale	contribution de v_1	contribution de v_2
1	4	$var(\sqrt{2}v_{1t}) = 2$ 50%	$var(\sqrt{2}v_{2t}) = 2$ 50%
2	5.60	$var(\sqrt{2}v_{1t}+0.8\sqrt{2}v_{1t-1}) = 3.28$ 59%	$var(\sqrt{2}v_{2t}+0.4\sqrt{2}v_{2t-1}) = 2.32$ 41%

8. Si on regarde le modèle structurel donné par les deux premières équations, y_t affecte x_t alors que la réciproque n'est pas vraie : y_t ne dépend pas de x_t mais seulement des valeurs retardées de x. Ainsi un choc d'innovation afférent à x_t ne devrait pas affecter y_t. Or dans le tableau précédent on attribue 50% de la variance des erreurs commises sur y_t à cette innovation. Ce résultat, qui est incompatible avec le modèle structurel, provient de ce que l'on a entré x_t en première variable dans le VAR alors que l'on aurait dû mettre l'équation de y_t en tête.
9. On part du VAR :

$$\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -0.2 \\ 0.4 & 0.4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_{t-1} \\ y_{t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{xt} \\ u_{yt} \end{pmatrix}$$

on soustrait (x_{t-1}, y_{t-1}) à gauche et à droite, il vient :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \Delta x_t \\ \Delta y_t \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & -0.2 \\ 0.4 & -0.6 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_{t-1} \\ y_{t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{xt} \\ u_{yt} \end{pmatrix} \\ &= \Pi \begin{pmatrix} x_{t-1} \\ y_{t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{xt} \\ u_{yt} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi $|\Pi| = 0.08$: la matrice Π est inversible, elle est donc de rang 2. En conséquence les variables x et y sont I(0) et la modélisation qui leur est adaptée est un VAR en niveau, ce qui est bien conforme avec la stabilité mise en évidence précédemment (Cf. question 3).

Exercice 2

On sait que les prévisions tirées d'un VAR sont obtenues en itérant ses équations : avec celles-ci on construit des prévisions en t pour $t + 1$, prévisions qui sont utilisées pour construire celles de $t + 2$, etc...Or ces équations sont estimées par OLS et bien évidemment les résultats de ces OLS ne dépendent pas de l'ordre dans lequel on les estime. En d'autres termes les prévisions tirées d'un VAR ne dépendent pas de l'ordre d'entrée des variables dans le VAR. Cela implique que les prévisions des deux étudiants devraient être identiques : si elles ne le sont pas c'est que l'un (ou les deux) a (ont) commis des erreurs de programmation. Ainsi, que l'on sache ou pas que y ne cause pas x, le seul conseil à leur donner est de revoir leur programme et/ou d'utiliser un package ou une procédure digne de confiance.

Exercice 3

(a) Ce tableau présente évidemment les résultats d'un test de cointégration proposé par Johansen. Ce test de la trace conduit à rejeter l'hypothèse nulle $r = 0$ et à ne pas rejeter $H0 : r = 1$ ce qui est favorable à l'existence d'une relation de cointégration, i.e. d'une équation d'équilibre de long terme, entre la température et le niveau des océans. On peut aussi en conclure que ces variables seraient I(1) et que la modélisation adaptée du vecteur (h_t, T_t) est un modèle à correction d'erreur.

(b) l'hypothèse de stationnarité jointe des 2 séries est associée à un rang de Π égal à deux. Il faudrait donc successivement rejeter $H0 : r = 0$ puis $H0 : r = 1$. Pour cela, si on garde la valeur de 20.76 pour la première ligne, il suffirait d'avoir une statistique de la trace supérieure à 3.84 dans la deuxième ligne.

(c) Pour écrire les vecteurs α et β tels que $\hat{\Pi} = \hat{\alpha}\hat{\beta}^{\top}$, il faut simplement faire attention à l'ordre d'entrée des variables : h en première équation et T en deuxième. On a alors :

$$\hat{\Pi} = \hat{\alpha}\hat{\beta} = (4.15, -0.40)(-0.0031, 1) = \begin{bmatrix} -0.129 & 4.15 \\ 0.00124 & -0.4 \end{bmatrix}$$

(d) Il s'agit des équations du modèle à correction d'erreur justifié par les résultats du tableau (Cf. question 1). Ici, les explicatives sont I(0) et on peut utiliser des tests de student notamment sur les coefficients du vecteur $\hat{\alpha}$ qui gouvernent la vitesse des ajustements à l'erreur d'équilibre de long terme, celle-ci étant en t égale à $(T_t - 0.0031h_t)$.

— pour le niveau des océans, $t = \frac{4.15}{4.82} = 0.86$, à comparer à la valeur critique d'une gaussienne (on est en asymptotique) ou, si on veut ajuster pour prendre en compte la taille finie de l'échantillon, à une student 115-2-4=107 degrés de liberté (on perd 2 points en raison du passage en différences premières de la régression sur 1 retard). Dans les deux cas on ne peut pas rejeter au seuil de 5% la nullité du coefficient d'ajustement.

— pour la température, $t = \frac{-0.40}{0.094} = -4.25$: à 5% de risque on rejette la nullité.

Au total il existerait une relation d'équilibre entre hauteur des océans et température dont l'écriture serait $T_t = 0.0031h_t$. En cas de déséquilibre, c'est la température qui s'ajusterait (on trouverait aussi une dépendance de court terme entre la variation de la hauteur en t et sa variation précédente).