Correction : Séries Temporelles Multivariées - Session 1

Gilbert Colletaz

14 mai 2020

1 Exercice 1

On a d'une part :

$$u_{1t} = x_t - ax_{t-1} - by_{t-1}$$

D'autre part dans le cas général où σ_{12} n'est pas nul il existe une relation linéaire entre u_{1t} et u_{2t} : $u_{2t} = fu_{1t} + \epsilon_t = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1^2} u_{1t} + \epsilon_t$. Et donc :

$$\begin{aligned} y_t &= cx_{t-1} + dy_{t-1} + f(x_t - ax_{t-1} - by_{t-1}) + \epsilon_t \\ &= fx_t + (c - fa)x_{t-1} + (d - fb)y_{t-1} + \epsilon_t \end{aligned}$$

Ainsi, dans (1.3) il vient : $\beta_1 = f = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1^2}$, $\beta_2 = (c - fa)$ et $\beta_3 = (d - fb)$.

Au final, dans le cas général où il y a dépendance instantanée entre les variables, $i.e.$ $\sigma_{12} \neq 0$:

— Si x n'est pas un prédicteur avancé de y, alors $c = 0$ dans (1.2), ce qui n'implique pas $\beta_2 = 0$ dans (1.3),

— Si x est un prédicteur avancé de y alors $c \neq 0$ dans (1.2), ce qui n'implique pas $\beta_2 \neq 0$ dans (1.3)

Le test proposé n'est donc pas acceptable, dans le cas général, pour tester la causalité de x vers y. Ce n'est que dans le cas particulier où il n'y a pas de dépendance instantanée que l'on peut étudier la causalité de x vers y dans l'ARDL puisqu'alors $c = \beta_2$: la nullité ou la non nullité de l'un des deux coefficients implique la même propriété sur l'autre.

2 Exercice 2

1. On peut imaginer que (2.1) est une régression de cointégration où $\hat{r}_t$ serait l'estimateur d'un écart d'équilibre de long terme. Avec cette interprétation, les équations (2.2) et (2.3) seraient celles d'un modèle à correction d'erreur. On doit alors penser au théorème de représentation de Granger : s'il y a cointégration, alors il y a un MCE sur les variables considérées avec au moins un des coefficients d'ajustement à l'erreur d'équilibre de long terme qui n'est pas nul, la réciproque étant également vraie. Pour étudier cela, il suffit de tester la nullité des coefficients d'ajustement α :

$$\text{dans } (2.2), \hat{\alpha}_1 = 0.256, Ho : \alpha_1 = 0 \text{ vs } H1 : \alpha_1 \neq 0 \rightarrow t = 0.256/0.229 = 1.118 \sim t(80)$$
$$\text{dans } (2.2), \hat{\alpha}_2 = 0.370, Ho : \alpha_2 = 0 \text{ vs } H1 : \alpha_2 \neq 0 \rightarrow t = 0.370/0.179 = 2.067 \sim t(80)$$

Au seuil de 5% on rejette la nullité de α_2, on ne rejette pas celle de α_1. Conformément à la proposition précédente il y aurait donc cointégration entre les deux prix.

2. D'après le résultat précédent, seul p_b s'ajuste, ce qui signifie que p_a définit une cible d'équilibre pour p_b. Avec l'équation (2.1) , $p_{a,t} = 1.179 p_{b,t} - 1.223 + \hat{r}_t$, on note que :
   — Si $\hat{r}_t > 0$ alors p_b doit augmenter pour retourner à l'équilibre,
   — Si $\hat{r}_t < 0$ alors p_b doit diminuer pour la même raison.

   Ce comportement est compatible avec le modèle ajusté puisque α_2 est positif. Au final, si on a observé des écarts négatifs, alors p_b doit diminuer, il faut donc en t_0 vendre de l'action B. (Pour info, cette technique en version un peu plus élaborée fait partie des techniques dites d'arbitrages statistiques implémentées dans les robots boursiers).

3 Exercice 3

1. Le processus autorégressif est d'ordre 1, il n'y a donc pas d'augmentations et le modèle à correction d'erreur s'écrit :

$$\begin{aligned}\Delta y_{1t} &= \alpha_1(\beta_1 y_{1,t-1} + \beta_2 y_{2,t-1}) + u_{1t}\\ \Delta y_{2t} &= \alpha_1(\beta_1 y_{1,t-1} + \beta_2 y_{2,t-1}) + u_{2t}\end{aligned}$$

2. D'après les deux équations du MCE :

$$\begin{aligned}y_{1t} &= y_{1,t-1} + \alpha_1(\beta_1 y_{1,t-1} + \beta_2 y_{2,t-1}) + u_{1t}\\ y_{2t} &= y_{2,t-1} + \alpha_2(\beta_1 y_{1,t-1} + \beta_2 y_{2,t-1}) + u_{2t}\end{aligned}$$

   soit $z_t = \beta_1 y_{1,t} + \beta_2 y_{2,t}$ l'erreur d'équilibre de long terme en t. Il vient alors :

$$\begin{aligned}z_t &= \beta_1 y_{1,t-1} + \beta_1\alpha_1(\beta_1 y_{1,t-1} + \beta_2 y_{2,t-1}) + \beta_1 u_{1t}\\ &\quad + \beta_2 y_{2,t-1} + \beta_2\alpha_2(\beta_1 y_{1,t-1} + \beta_2 y_{2,t-1}) + \beta_2 u_{2t}\\ &= \beta_1 y_{1,t-1} + \beta_1^2\alpha_1 y_{1,t-1} + \beta_1\beta_2\alpha_1 y_{2,t-1} + \beta_1 u_{1t}\\ &\quad + \beta_2 y_{2,t-1} + \beta_2\alpha_2\beta_1 y_{1,t-1} + \beta_2^2\alpha_2 y_{2,t-1} + \beta_2 u_{2t}\\ &= \beta_1 y_{1,t-1} + \beta_2 y_{2,t-1} + \alpha_1\beta_1(\beta_1 y_{1,t-1} + \beta_2 y_{2,t-1}) + \beta_2\alpha_2(\beta_1 y_{1,t-1} + \beta_2 y_{2,t-1})\\ &\quad + \beta_1 u_{1t} + \beta_2 u_{2t}\\ &= (1 + \alpha_1\beta_1 + \beta_2\alpha_2) z_{t-1} + v_t\end{aligned}$$

   où v_t est un processus en bruit blanc. L'erreur d'équilibre est donc gouvernée par un AR(1)
3. S'il y a cointégration, c'est que cette erreur d'équilibre est stationnaire et on sait que pour un AR(1), la stationnarité impose que son coefficient soit en valeur absolue inférieur à l'unité, soit ici :

$$|1 + \alpha_1\beta_1 + \beta_2\alpha_2| < 1, \text{ et donc } : -2 < \alpha_1\beta_1 + \beta_2\alpha_2 < 0 \tag{3.1}$$

4. L'écriture modèle à correction d'erreur est préférable pour l'étude de la causalité à l'écriture autorégressive d'un système cointégré car elle permet de distinguer entre causalité de long terme, via les loadings factors et l'erreur d'équilibre de long terme, de la causalité conjoncturelle donnée par les termes d'augmentation. Par ailleurs, elle permet d'utiliser les tests d'hypothèse usuels car les variables sont alors I(0), alors que ce n'est généralement pas le cas sur l'écriture autorégressive dans laquelle les variables sont au moins I(1).