Examen : Séries Temporelles Multivariées

Gilbert Colletaz

jeudi 17 mai 2018 - Durée 3 heures

— Sans document, excepté les tables statistiques et calculatrice simple.
— Toute réponse doit être justifiée : pas de justification = pas de point
— On vous donne les résultats suivants,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \; et \; \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

— Remarque : Par la suite on reprend le cadre d'analyse du cours : les séries considérées sont soit I(0), soit au plus I(1).

Vrai ou Faux ? (2 points)

Répondez par vrai ou faux aux propositions suivantes (inutile de justifier votre réponse) - +1 si bon, -1 si réponse fausse, 0 si pas de réponse.

1. Si les variables x et y sont générées par les équations suivantes :

$$y_t = a_0 + a_1 x_t + u_{yt} \tag{1}$$
$$x_t = b_0 x_{t-1} + u_{xt} \tag{2}$$

   où u_{yt} et u_{xt} sont des bruits blancs indépendants alors il existe un ordre d'entrée des variables dans le VAR préférable à tout autre pour que le test de cointégration de Johansen soit fiable.
2. Soit deux séries I(1). On sait qu'il n'existe pas de causalité selon Granger entre ces deux séries. Dans ces conditions, elles ne sont pas cointégrées.

1 Exercices

Exercice 1 (4 points : 2+1+1)

On considère le système trivarié suivant :

$$y_{1t} = -y_{2t} + y_{3t} - y_{3t-1} + u_{1t} \tag{3}$$
$$y_{2t} = y_{1t} + y_{3t} - y_{3t-1} + u_{2t} \tag{4}$$
$$y_{3t} = y_{3t-1} + u_{3t} \tag{5}$$

avec $u_t = (u_{1t}, u_{2t}, u_{3t})^\top$ un bruit blanc vectoriel de matrice de variance-covariance $E[u_t u_t^\top] = \Sigma_u$ non nécessairement diagonale.

1. Combien de relations de cointégration, r, sont présentes dans ce système.
2. Quels sont les ordres d'intégration de y_1, y_2, y_3 ?
3. Donnez un exemple de r vecteurs cointégrants, i.e., donnez un exemple de matrice β.

Exercice 2 (4 points : 1+1+2)

On considère le système d'équations suivant :

$$\Delta x_t = \alpha_1 (x_{t-1} - y_{t-1}) + u_{1t} \tag{6}$$
$$\Delta y_t = \alpha_2 (x_{t-1} - y_{t-1}) + u_{2t} \tag{7}$$

où $u_t = (u_{1t}, u_{2t})^\top$ est un processus en bruit blanc à composantes indépendantes.

1. Quel est le processus suivit par $S_t = \alpha_2 x_t - \alpha_1 y_t$.
2. Quelle modélisation est adaptée au couple (x_t, y_t) : VAR sur leurs niveaux, VAR sur leurs différences, VECM ?
3. Soit $z_t = x_t - y_t$. Quelle(s) condition(s) doit-on mettre sur α_1 et α_2 pour que les équations (6) et (7) correspondent au théorème de représentation de Granger ?

Exercice 3 (3 points)

Dans un de leurs travaux, Corbae et Ouliaris (The Review of Economics and Statistics, Vol. 70, Aug., 1988, pp. 508-511) questionnent la validité de la théorie de la parité des pouvoirs d'achat. Selon celle-ci, à l'équilibre on doit vérifier $P_t = s_t P_t^*$, où s, P et P^* désignent respectivement le taux de change entre les monnaies de deux pays, le niveau des prix domestiques et le niveau des prix étrangers. Cette condition d'équilibre peut naturellement se réécrire sur le taux de change réel $R_t = \gamma^\top X_t = 0$, avec $\gamma^\top = (1, -1, -1)$ et $X_t = (\ln P_t, \ln s_t, \ln p_t^*)$. Leurs données sont mensuelles et couvrent la période juillet 1973-septembre 1986, soit 154 observations. Ils étudient les taux de change de monnaies de six pays vis-à-vis du dollar des États-Unis et présentent trois tableaux de résultats dont une partie est reproduite ci-après.
Expliquez, en une dizaine de lignes maximum, leur démarche, l'hypothèse testée et son rapport avec la théorie de la PPA. Enfin, avec un seuil de risque de 5% et en indiquant les valeurs critiques utilisées, imaginez la conclusion à laquelle sont parvenus ces deux auteurs.

Table 1 - Unit root test for the Consumer Price Index (in logarithm)

Country	ADF
USA	-2.2268
Canada	-2.2600
France	-2.1958
Italy	-2.7575
United Kingdom	-3.9697
Germany	-2.3414
Japan	-5.5377

Table 2 - Unit root test for the spot exchange rate, s_t (in logarithm)

Country	ADF
Canada	-0.2887
France	-1.2428
Italy	-1.3515
United Kingdom	-1.3564
Germany	-1.6309
Japan	-1.1807

Table 3 - Unit root test for the real exchange rate, $\gamma^\top X_t$

Country	ADF
Canada/USA	0.3588
France/USA	-0.9637
Italy/USA	-1.2177
United Kingdom/USA	-1.4040
West Germany/USA	-1.6819

Exercice 4 (7 points : 1+1+3+2)

Soit deux variables x_t et y_t gouvernées par une écriture autorégressive de la forme :

$$\begin{pmatrix} y_t \\ x_t \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_{t-1} \\ x_{t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{pmatrix} = \Phi_1 \begin{pmatrix} y_{t-1} \\ x_{t-1} \end{pmatrix} + u_t \tag{8}$$

où u_t est un processus en bruit blanc. Sur un échantillon constitué de 40 observations, on a obtenu les estimations suivantes (entre parenthèses figurent les écarts-types des coefficients estimés) :

$$\hat{\Phi}_1 = \begin{bmatrix} \underset{(0.15)}{0.61} & \underset{(0.09)}{0.08} \\ \underset{(0.21)}{-0.77} & \underset{(0.14)}{-0.34} \end{bmatrix} \text{ et } \hat{\Sigma}_u = \begin{bmatrix} 0.77 & 0.18 \\ 0.18 & 1.64 \end{bmatrix}$$

1. Est-on en présence d'un processus estimé stationnaire ?
2. x cause-t-il y au sens de Granger ?
3. Donnez les 3 premiers coefficients des fonctions de réponse orthogonales de y et de x à un choc unitaire afférent à y. Rappelez quelle serait dans la procédure VARMAX la définition de l'ampleur de ce choc, et si possible sa valeur.
4. Construisez le tableau de décomposition de la variance des erreurs de prévisions afférent à la variable y pour les horizons de prévision $h = 1, 2, 3$.