Examen de Séries Temporelles Univariées
Durée 3 heures
Matériel autorisé = tables statistiques et calculatrice simple

Gilbert Colletaz

5 janvier 2021

Vrai ou Faux ?

barème : +1/2 si bonne réponse, -1/2 si mauvaise réponse, 0 si absence de réponse

Précisez simplement et sans justification si la proposition est vraie ou fausse :

1. si x est gouvernée par un MA(q), alors $cov(x_t, x_{t-i}) = 0$ si $i > q$.
2. Compte-tenu du résultat précédent si on explique x_t au moyen d'un modèle linéaire sur son passé $x_{t-1}, x_{t-2}, \ldots$ alors les coefficients des x_{t-i} sont nuls pour $i > q$.
3. x_t est une série possédant des autocorrélations non nulles. Soient ${}_t x_{t+h}$ la prévision optimale au sens du critère MSE tirée d'un filtre ARMA, et $u_{t+h} = x_{t+h} - {}_t x_{t+h}$. Alors $Cov(x_{t+1}, u_{t+h}) = 0$.
4. Si $x_t = \phi_0 + \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + u_t$ est stationnaire avec u_t un processus en bruit blanc de variance σ_u^2 alors $\gamma_0 = var(x_t) = \left[\frac{\sigma_u^2}{1-\phi_1^2-\phi_2^2}\right]$.
5. Si $x_t = 1.4x_{t-1} - 0.4x_{t-2} + u_t - u_{t-1}$ alors x est stationnaire.
6. Tout processus AR(p) stationnaire possède une représentation MA.

Exercices

1. (**4 points**) On a modélisé le montant du Produit Intérieur Brut au moyen d'une régression linéaire et obtenu : $\widehat{PIB}_t = 33 + 1.90\,t + \hat{u}_t$, avec $t = 1, 2, 3, \ldots$. La variance des erreurs, supposées gaussiennes, est estimée à $s_u^2 = 120$. Sur ces erreurs on a estimé un MA(3) : $(1 + 1.26L + 1.11L^2 + 0.61L^3)\hat{u}_t = \epsilon_t$. Enfin, à la période t=240 on observe $\text{PIB}_{240} = 506$. Au moyen de ces informations :
   (a) Diriez-vous que l'on est en période de récession en t=240 et pourquoi ? (**1 point**)
   (b) En t=240 on vous demande également de construire une prévision pour t=243 et de fournir un intervalle de confiance à 95% pour cette prévision. Expliquez succinctement votre démarche (**3 points**)

2. (**4 points**) Soit le processus afférent à des observations journalières $(1 - .6L)x_t = 20 + u_t$ avec $\sigma_u^2 = 36$ et u un bruit blanc gaussien. Les valeurs observées pour x les 4 et 5 janvier 2021 sont respectivement égales à 112 et 88.
   (a) Le 5 janvier 2021 on vous demande de construire des prévisions pour le 6 et le 7 janvier ainsi qu'un intervalle de confiance à 95% pour celles-ci. (**2 points**)
   (b) Toujours le 5 janvier 2021 on vous demande de construire une prévision et un intervalle de confiance pour le 5 janvier 2022 (**2 points**)
3. (**2 points**) Sur une série de 100 observations on a obtenu les 5 premiers coefficients d'autocorrélation et d'autocorrélation partielle présentés dans la table 1. Quel processus allez-vous retenir ? Explicitez votre raisonnement en quelques lignes.
4. (**2 points**) Sur une série x de longueur 150 pour laquelle on sait que $E(xt) = 0$, on a réalisé des tests DF et ADF. Dans la table 2 on vous donne un certain nombre de résultats obtenus lorsque l'expliquée est soit la différence première de x, Δx_t, soit sa différence seconde, $\Delta^2 x_t$, sachant que p est l'ordre d'augmentation du test de Dickey-Fuller, et Q la statistique de Ljung-Box associée à l'équation ajustée, statistique calculée sur les huit premiers coefficients d'autocorrélation. En expliquant précisément mais de façon concise votre démarche, donnez une indication de l'ordre d'intégration de la série x en travaillant avec un seuil de risque de 5%.
5. (**4 points**) Sur données journalières on suppose que la valeur d'une variable un jour quelconque dépend de la valeur qu'elle avait 7 jours auparavant et d'un processus d'innovation bruit blanc u de variance σ_u^2. Soit donc le processus correspondant :

$$(1 - \phi_1 L^7)x_t = u_t$$

   On vous demande :
   (a) Quelle est l'écriture MA de ce processus et sa condition de stationnarité ? (**1 point**)
   (b) Quelle est l'expression de γ_0, la variance de x_t en fonction de ϕ_1 et de σ_u^2 ? (**1 point**)
   (c) Quelles sont les expressions des autocorrélations ρ_1, ρ_7, ρ_8 et ρ_{14} ? (**1 point**)
   (d) Quelles sont les expressions des autocorrélations partielles ϕ_{11}, ϕ_{77}, ϕ_{88} et $\phi_{14,14}$? (**1 point**)
6. (**1 point**) On a simulé une trajectoire de 300 observations pour une variable y. Le résultat vous est présenté dans la figure 1. Pour l'obtenir on a utilisé un des 4 processus précisés ci-après. Dans ces équations, u_t est un processus en bruit blanc gaussien d'écart-type égal à 1.0. Pouvez-vous deviner quel est celui qui a vraisemblablement été employé pour générer ces observations, expliquer les raisons de votre choix et notamment ce qui vous amène à écarter les autres.
   (a) $y_t = 0.8y_{t-1} + 5\,u_t$
   (b) $y_t = 0.8y_{t-1} + 10 + u_t$
   (c) $y_t = 0.8y_{t-1} + 0.5\,u_t$
   (d) $y_t = 1.8y_{t-1} + u_t$

k	1	2	3	4	5
r_k	0.65	0.47	0.35	0.24	0.18
$\hat{\phi}_{kk}$	0.65	-0.31	-0.08	-0.15	0.10

TABLE 1 – coefficients d'autocorrélation et d'autocorrélation partielle

	Δx_t			$\Delta^2 x_t$		
	p=0	p=1	p=2	p=0	p=1	p=2
τ	-1.56	-1.65	-1.43	-4.32	-4.66	-4.98
τ_μ	-2.61	-2.71	-2.35	-5.65	-5.72	-6.04
τ_t	-3.22	-3.26	-3.17	-5.98	-6.13	-6.57
Q	16.45	10.36	8.85	9.62	8.60	7.86

TABLE 2 – Test de Dickey-Fuller et statistique de Ljung-Box

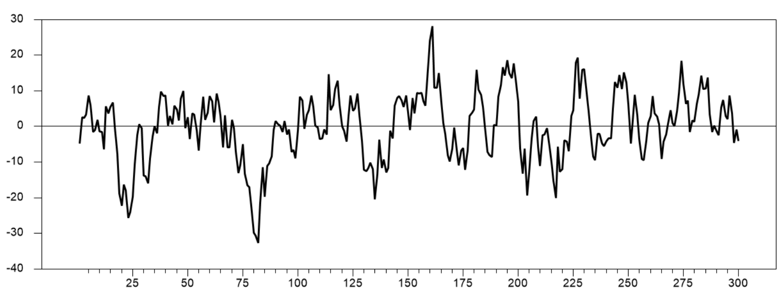

FIGURE 1 – simulation d'une trajectoire de 300 observations