Correction de l'épreuve de Séries Temporelles Multivariées du jeudi 17 mai 2018

Gilbert Colletaz

23 mai 2018

Vrai ou Faux ?

1. Faux
2. Vrai

1 Exercices

Exercice 1

1. Ce nombre est le rang de π dans l'écriture $\Delta y_t = \pi y_{t-1} + u_t$. On a :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \\ y_{3t} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_{1t-1} \\ y_{2t-1} \\ y_{3t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \\ u_{3t} \end{pmatrix}$$

et donc

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \\ y_{3t} \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_{1t-1} \\ y_{2t-1} \\ y_{3t-1} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \\ u_{3t} \end{pmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 & 0.0 \\ 0.5 & 0.5 & 1.0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_{1t-1} \\ y_{2t-1} \\ y_{3t-1} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 & 0.0 \\ 0.5 & 0.5 & 1.0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \\ u_{3t} \end{pmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_{1t-1} \\ y_{2t-1} \\ y_{3t-1} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 & 0.0 \\ 0.5 & 0.5 & 1.0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \\ u_{3t} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Finalement

$$\Delta y_t = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_{1t-1} \\ y_{2t-1} \\ y_{3t-1} \end{pmatrix} + v_t, \text{ avec } v_t = \begin{pmatrix} 0.5(u_{1t} - u_{2t}) \\ 0.5(u_{1t} + u_{2t}) + u_{3t} \\ u_{3t} \end{pmatrix} \sim bb$$

Cette matrice π est évidemment non inversible, et est de rang égal à deux. Il y a donc deux relations de cointégration dans ce système.

2. Si on écrit chacune des équations du système précédent, il vient :

$$\begin{aligned}\Delta y_{1_t} &= -y_{1t-1} + v_{1t},\\ \Delta y_{2_t} &= -y_{2t-1} + v_{2t},\\ \Delta y_{3_t} &= v_{3t},\end{aligned}$$

On reconnaît alors l'équation de Dickey-Fuller, $\Delta x_t = bx_{t-1} + \epsilon_t$, où ϵ_t est un bruit blanc, et $b = -1$ dans les deux premières et $b = 0$ dans la troisième. On sait qu'à $b < 0$ correspond un AR stationnaire, et qu'avec $b = 0$ on a une marche au hasard. Ainsi, $y_1 \sim I(0)$, $y_2 \sim I(0)$, $y_3 \sim I(1)$.

3. Compte-tenu du résultat qui précède, il suffit de donner des vecteurs non colinéaires qui redonnent y_{1t} ou y_{2t} ou une combinaison des 2, par exemple, $\beta^\top = (1, 0, 0)$ ou $\beta^\top = (0, 1, 0)$. L'essentiel est que la troisième composante de β soit nulle.

Exercice 2

1. On a :

$$\begin{aligned}x_t &= x_{t-1} + \alpha_1 x_{t-1} - \alpha_1 y_{t-1} + u_{1t}\\ y_t &= y_{t-1} + \alpha_2 x_{t-1} - \alpha_2 y_{t-1} + u_{2t}\end{aligned}$$

soit,

$$\begin{aligned}\alpha_2 x_t &= \alpha_2 x_{t-1} + \alpha_2\alpha_1 x_{t-1} - \alpha_2\alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 u_{1t}\\ \alpha_1 y_t &= \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_1\alpha_2 x_{t-1} - \alpha_1\alpha_2 y_{t-1} + \alpha_1 u_{2t}\end{aligned}$$

en conséquence :

$$\begin{aligned}S_t = \alpha_2 x_t - \alpha_1 y_t &= \alpha_2 x_{t-1} - \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 u_{1t} - \alpha_1 u_{2t}\\ &= S_{t-1} + \epsilon_t, \text{ avec } \epsilon_t = \alpha_2 u_{1t} - \alpha_1 u_{2t}\end{aligned}$$

On montre aisément que ϵ_t est un bruit blanc, et donc que S_t est une marche au hasard, en particulier, $S_t \sim I(1)$.

2. L'écriture de Dickey-Fuller du système initial est la suivante :

$$\begin{pmatrix}\Delta x_t\\ \Delta y_t\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}\alpha_1 & -\alpha_1\\ \alpha_2 & -\alpha_2\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_{t-1}\\ y_{t-1}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}u_{1t}\\ u_{2t}\end{pmatrix}$$

comme $\pi = \begin{bmatrix}\alpha_1 & -\alpha_1\\ \alpha_2 & -\alpha_2\end{bmatrix}$ a son déterminant nul et que $\text{rang}(\pi) = 1$, les variables x et y ne sont pas I(0) mais I(1) et il existe une relation de cointégration. La modélisation adaptée est donc un VECM.

3. Soit $z_t = x_t - y_t$. Dans ces équations, les membres de gauche sont des différences premières de séries I(1), ils sont donc I(0). Pour se caler sur le théorême de représentation de Granger il faut encore que $x_{t-1} - y_{t-1}$ soit aussi I(0). Or,

$$\begin{aligned} z_t &= x_t - y_t \\ &= x_{t-1} + \alpha_1 x_{t-1} - \alpha_1 y_{t-1} + u_{1t} \\ &- y_{t-1} - \alpha_2 x_{t-1} + \alpha_2 y_{t-1} - u_{2t} \\ &= (1 + \alpha_1 - \alpha_2)(x_{t-1} - y_{t-1}) + u_{1t} - +u_{2t} \\ &= (1 + \alpha_1 - \alpha_2) z_{t-1} + \epsilon_t \end{aligned}$$

Le terme d'erreur des équations, $(x_{t-1} - y_{t-1})$, est un AR(1). Pour être stationnaire, il faut $|1 + \alpha_1 - \alpha_2| < 1$, *i.e.* $-2 < \alpha_1 - \alpha_2 < 0$

Exercice 3

Selon la théorie de la PPA, la valeur d'équilibre du taux de change réel (en logarithme) est donc nulle. Dans la logique d'une équilibre de long terme, cela revient à poser qu'à toute date t ce taux peut dévier de cette valeur d'équilibre, mais il doit avoir tendance à y revenir. Ainsi, la présence d'une racine unitaire dans la série du change réel implique la non validité de cette théorie, et à l'inverse, la validité de la PPA implique l'absence d'un trend stochastique dans cette variable. L'idée ici est de mener un test de racine unitaire de sorte que :

— H0 : la série R_t contient un trend stochastique,

— H1 : on rejette la présence d'un trend stochastique

équivaut à :

— H0 : les données ne sont pas compatibles avec la PPA,

— H1 : le test de DF ne permet pas de rejeter la PPA

Il suffit donc de faire un test de racine unitaire sur la série des taux de change réels. On note que cette série de taux de change réel n'est pas estimée mais observée : on impose le vecteur des pondérations $\gamma = (1, -1, -1)^\top$. C'est donc le test de Dickey-Fuller qui doit être réalisé et non pas celui d'Engle-Granger. Par ailleurs, sous l'alternative, la série devrait être stationnaire autour de zéro : c'est donc la version sans constante ni trend du test de Dickey-Fuller qui devrait être utilisée. Avec 154 observations, la valeur critique tirée de la table de McKinnon au seuil de 5% est, pour τ, égale à -1.94. A ce seuil de risque, les valeurs des tests ADF de la table 3 ne permettent pas de rejeter l'hypothèse de présence d'une racine unitaire dans le taux de change réel des différents pays. En conséquence le test ADF n'est pas favorable à la validité de la théorie de la PPA.

Exercice 4

1. On a :

$$\begin{bmatrix} 1-\phi_{11}L & -\phi_{12}L \\ -\phi_{21}L & 1-\phi_{22}L \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_t \\ x_t \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1-0.61L & -0.08L \\ +0.77L & 1+0.34L \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_t \\ x_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{pmatrix}$$

   et

$$\begin{aligned} det(I-\hat{\Phi}_1 L) &= (1-0.61L)(1+0.34L)+0.08L\times 0.77L \\ &= 1-0.27L-0.1458L^2 \end{aligned}$$

   polynôme de degré deux dont les racines égales à -3.70370 et 1.85185 sont en valeur absolue supérieures à l'unité : le VAR est stable, donc stationnaire.

2. Le student associé au coefficient de x_{t-1} dans l'équation de y_t égal à $0.08/0.09 = 0.89$ ne permet pas de rejeter sa nullité aux seuils de risque usuels. On ne rejette donc pas l'hypothèse selon laquelle que x n'est pas un prédicteur avancé de y.

3. On a d'une part :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y_t \\ x_t \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} 1-0.61L & -0.08L \\ +0.77L & 1+0.34L \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{1-0.27L-0.1458L^2} \begin{bmatrix} 1+0.34L & 0.08L \\ -0.77L & 1-0.61L \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

   D'autre part avec le $\hat{\Sigma}_u$ indiqué, la décomposition de Cholesky donne :

$$P = \begin{bmatrix} 0.8775 & 0.0 \\ 0.2051 & 1.264 \end{bmatrix}$$

   avec les chocs orthogonaux $v_t = P^{-1}u_t$
   En combinant ces deux résultats, il vient :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y_t \\ x_t \end{pmatrix} &= \frac{1}{1-0.27L-0.15L^2} \begin{bmatrix} 1+0.34L & 0.08L \\ -0.77L & 1-0.61L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8775 & 0.0 \\ 0.2051 & 1.264 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_{1t} \\ v_{2t} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{1-0.27L-0.15L^2} \begin{bmatrix} 0.88+0.31L & 0.0+0.10L \\ 0.21-0.8L & 1.26-0.77L \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_{1t} \\ v_{2t} \end{pmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.88+0.55L+0.28L^2+\ldots & 0.0+0.10L+0.03L^2+\ldots \\ 0.21-0.75L-0.17L^2+\ldots & 1.26-0.43L0.07L^2+\ldots \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_{1t} \\ v_{2t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

   Ainsi suite à un choc sur y, les fonctions de réponse orthogonales sont :

horizon	1	2	3
réponse de y	0.88	0.55	0.28
réponse de x	0.21	-0.75	-0.17

Dans VARMAX, l'amplitude d'un choc pour le calcul des réponses orthogonales est d'un écart-type de la partie inexpliquée du choc. Pour le choc de rang i, cet écart-type est donné par p_{ii}, élément situé sur la diagonale de la matrice de décomposition de Cholesky. Ici, on aurait une amplitude pour le choc afférent à y de 0.8775.

4. Avec les fonctions de réponse précédentes on a pour y :

$$y_t = 0.88v_{1t} + 0.55v_{1t-1} + 0.28v_{1t-2} + 0.10v_{2t-1} + \ldots$$

et donc, sachant que v_1 et v_2 sont de variance unitaire et orthogonaux entre eux,

horizon	erreur de prévision	variance	part due à y
1	0.88 v_{1t}	0.78	100%
2	0.88 v_{1t}+0.55v_{1t-1}+0.10 v_{2t-1}	1.09	99%
3	0.88 v_{1t}+0.55v_{1t-1}+0.28 v_{1t-2}+0.10 v_{2t-1}	1.16	99%