Séries Temporelles Univariées
Master 1 ESA - Semestre 1, session 1, 2019-2020
.....
Correction de l'épreuve du 8 janvier 2020

Gilbert Colletaz

15 janvier 2020

1 Vrai ou Faux (2 points)

1. Faux.
2. Vrai.

2 Exercices

1. (a) Les options réclament 4 prévisions à partir d'août 2019. En conséquence :

$$E_{\text{août}}(y_{\text{septembre}}) = 1.05 * 9.0 - 0.26 * 8.5 = 7.24$$
$$E_{\text{août}}(y_{\text{octobre}}) = 1.05 * 7.24 - 0.26 * 9.0 = 5.262$$
$$E_{\text{août}}(y_{\text{novembre}}) = 1.05 * 5.262 - 0.26 * 7.24 = 3.6427$$
$$E_{\text{août}}(y_{\text{décembre}}) = 1.05 * 3.6427 - 0.26 * 5.262 = 2.45672$$

(b) Pour répondre à cette question il faut trouver la variance des erreurs de prévisions. Le plus simple est alors, si c'est possible, de passer par l'écriture de Wold. Or, le polynôme autorégressif $(1 - 1.05L + 0.26L^2)$ possède deux racines, 2.5 et 1.53846, qui sont donc de module supérieur à l'unité : il est bien inversible et on peut donc écrire :

$$y_t = (1 - 1.05L + 0.26L^2)^{-1} u_t$$

Il vient alors aisément :

$$y_t = (1.0 + 1.05\,L + 0.8425\,L^2 + 0.61163\,L^3 + 0.42316\,L^4 + \ldots)u_t$$

au final pour des prévisions formulées en t :

erreur de prévision à l'horizon 1 $= u_{t+1}$
erreur de prévision à l'horizon 2 $= u_{t+2} + 1.05u_{t+1}$
erreur de prévision à l'horizon 3 $= u_{t+3} + 1.05u_{t+2} + 0.8425u_{t+1}$
erreur de prévision à l'horizon 4 $= u_{t+4} + 1.05u_{t+3} + 0.8425u_{t+2} + 0.611163u_{t+1}$

Sachant que $s_u^2 = 3.0$, il vient :

$$
\begin{aligned}
&\text{variance de l'erreur à l'horizon } 1 = 3.0\\
&\quad\text{variance l'erreur à l'horizon } 2 = 3.0(1 + 1.05^2) = 6.3075\\
&\quad\text{variance l'erreur à l'horizon } 3 = 3.0(1 + 1.05^2 + 0.8425^2) = 8.43692\\
&\quad\text{variance l'erreur à l'horizon } 4 = 3.0(1 + 1.05^2 + 0.8425^2 + 0.611163^2) = 9.55917
\end{aligned}
$$

Ainsi les intervalles à 95% sont :
- à l'horizon 1 : $IC = 7.24 \pm 2 \times \sqrt{3.0} = [3.78; 10.70]$
- à l'horizon 2 : $IC = 5.262 \pm 2 \times \sqrt{6.3075} = [0.24; 10.28]$
- à l'horizon 3 : $IC = 3.6427 \pm 2 \times \sqrt{8.43692} = [-2.17; 9.45]$
- à l'horizon 4 : $IC = 2.45672 \pm 2 \times \sqrt{9.55917} = [-3.73; 8.64]$

(c) Comme le processus est stationnaire, la prévision de long terme converge vers l'espérance non conditionnelle du processus et la variance conditionnelle des erreurs vers sa variance.
- Il n'y a pas de constante dans l'équation de l'AR(2) : son espérance est nulle et donc la prévision tend vers zéro.
- Il faut ensuite trouver γ_0, sachant $y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + u_t$. Il vient :

$$
\begin{aligned}
\gamma_0 &= \phi_1\gamma_1 + \phi_2\gamma_2 + \sigma_u^2\\
\gamma_1 &= \phi_1\gamma_0 + \phi_2\gamma_1 \Rightarrow \gamma_1 = \frac{\phi_1\gamma_0}{1-\phi_2}\\
\gamma_2 &= \phi_1\gamma_1 + \phi_2\gamma_0
\end{aligned}
$$

Par substitutions répétées, on arrive à

$$\gamma_0 = \left(1 - (\phi_1 + \phi_2\phi_1)(\frac{\phi_1}{1-\phi_2}) - \phi_2^2\right)^{-1} \sigma_u^2$$

et en remplaçant les coefficients ϕ et σ_u^2 par leurs valeurs estimées, on obtient $\gamma_0 = 10.53$ et l'IC à 95% pour une prévision à horizon lointain est $\pm\sqrt{10.53} = [-6.49; 6.49]$

(d) Les 4 observations connues font apparaître une légère décroissance puisqu'entre septembre et décembre 2019 on passe de 11.1 à 9.0. Les prévisions anticipent une baisse beaucoup plus sévère, passant de 7.24 à 2.46. Surtout, aucune des 4 dernières observations ne se situe dans l'IC qui lui correspond : avec ces tests ponctuels, la trajectoire observée au dernier trimestre invalide l'emploi du modèle en prévision.

2. Le polynôme caractéristique de la composante AR est $(1 - 0.8L^2)$ or le polynôme $(1 - 0.8z^2)$ a comme racines $\pm 1/\sqrt(0.68)$. Elles sont de module supérieures a 1 : le processus est stationnaire. Dans ces conditions, avec $x_t = 0.8x_{t-2} + u_t$, il vient rapidement :

$$
\begin{aligned}
\gamma_0 &= 0.8^2\gamma 0 + \sigma_u^2\\
\gamma_1 &= 0.8\gamma_1 \Rightarrow \gamma_1 = 0\\
\gamma_2 &= 0.8\gamma_0
\end{aligned}
$$

- en conséquence, pour les coefficients de corrélations on a $\rho_1 = 0$ et $\rho_2 = 0.8$.
- on sait que $\phi_{11} = \rho_1$ et donc $\phi_{11} = 0$ par ailleurs, comme le processus est un AR(2), $\phi_{22} = \phi_2 = 0.8$.

3. (a) Le polynôme AR est $p(z) = 1 - 2.7z + 2.4z^2 - 0.7z^3$. Le processus est au moins intégré d'ordre un puisque $P(1) = 0$. Si on le factorise sur cette racine unitaire, il vient :

$$1 - 2.7L + 2.4L^2 - 0.7L^3 = (1 - L)(1 - 1.7L + .7L^2)$$

Soit $P_2(z) = (1 - 1.7z + .7z^2)$, il vérifie $P_2(1) = 0$: il y a une autre racine unitaire. En factorisant sur les deux racines unitaires, il vient :

$$1 - 2.7L + 2.4L^2 - 0.7L^3 = (1 - L)(1 - L)(1 - .7L)$$

Le polynôme $(1 - 0.7z)$ a une racine égale à 0.7^{-1} qui est supérieure à l'unité. Au final le processus initial est donc intégré d'ordre 2.

(b) Compte-tenu des précédents résultats :

$$(1 - 2.7L + 2.4L^2 - 0.7L^3)x_t = (1 - L)^2(1 - .7L)x_t = u_t$$

La différence seconde de x_t est stationnaire et est gouvernée par un AR(1). En définitive, $x_t \sim ARI(1, 2)$.

4. (a) On redonnait évidemment les régressions permettant de calculer les statistiques τ, τ_μ, τ_t de Dickey-Fuller afin d'effectuer un test de racine unitaire. Pour que ces statistiques possèdent leur distribution asymptotique, une condition nécessaire est que les résidus des régressions en question ne soit pas autocorrélés, d'où la Qstat qui sous l'hypothèse nulle d'absence d'autocorrélation obéit à un Chi-2. Celle-ci est calculée au moyen de 6 coefficients d'autocorrélation. Il faut corriger ce nombre de degrés de liberté du nombre de coefficients estimés, constante exclue. Les Qstat de la table auront donc pour les 3 premières lignes respectivement, 5, 5 et 4 degrés de liberté avec des valeurs critiques à 11.07, 11.07 et 9.49. Ces valeurs critiques s'appliquent également dans le même ordre aux 3 lignes qui suivent, dans lesquelles l'expliquée est la différence seconde du change. Dans tous les cas on ne peut pas rejeter l'hypothèse d'absence d'autocorrélation, ce qui permet d'interpréter les tests de Dickey-Fuller.

On s'intéresse donc maintenant aux 3 premières régressions : l'hypothèse nulle est donc celle de présence d'une racine unitaire dans la série du taux de change en niveau. Les 3 statistiques de Dickey-Fuller, et leur valeur critique à 5% tiré de la table de McKinnon sont les suivantes :

- $\tau = \frac{-0.000044712}{0.000163724} = -0.27$, valeur critique $= -1.9393 - 0.398/262 = -1.94$
- $\tau_\mu = \frac{-0.038779684}{0.016819288} = -2.31$, valeur critique $= -2.8621 - 2.738/262 - 8.36/262^2 = -2.87$
- $\tau_t = \frac{-0.0672}{0.0228}$ = -2.94, valeur critique $= -3.4126 - 4.039/262 - 17.83/262^2 = -3.43$

Quelle que soit le test considéré, on ne rejette pas l'hypothèse nulle de présence d'un trend stochastique.

Les trois régressions suivantes reprennent les mêmes tests mai il sagit maintenant de regarder s'il existe un racine unitaire dans la série des différences première du change, i.e. s'il existe une seconde racine unitaire dans le change en niveau. La même démarche que ci-dessus conduit à :

- $\tau = \frac{-0.978124266}{0.062186144} = -15.73$, valeur critique = -1.94
- $\tau_\mu = \frac{-0.978270576}{0.062301103} = -15.70$, valeur critique = -2.87
- $\tau_t = \frac{-0.9786}{0.0624}$ = -15.67, valeur critique = -3.43

L'hypothèse nulle est maintenant rejetée : la différence première du change serait I(0) et donc le change en niveau serait I(1).

(b) La série de taux de change serait non stationnaire.

— le premier argument est donné par les précédents résultats : une série possèdant une seule racine unitaire contient un trend stochastique et est non stationnaire en niveau, et stationnaire seulement en différences premières.

— le second argument est donné par les coefficients d'autocorrélation de la série de change présentés dans la table 3 : ils sont à la fois élevés et à décroissance très lente, ce qui est la marque d'une série non stationnaire en espérance.

(c) Si on regarde les autocorrélations de la série des différences premières du taux de chenge dans la table 3, on constante qu'elles sont toutes proches de zéro et individuellement non significatives : chacune tombe dans un intervalle de confiance à 95% construit autour de zéro, cet intervalle étant de la forme $\pm 2/\sqrt{T} = \pm 2/\sqrt{261} = 0.124$. Par ailleurs le test de nullité jointe des 6 premiers coefficients de corrélation donne une Qstat de 5.02 pour une valeur critique à 5% d'un Chi-2 à 6 degrés de liberté égale à 12.59 : on ne rejette pas leur nullité. En d'autres termes, la série des différences premières du change serait constituée d'observations orthogonales entre elles. Par ailleurs, ces différences devraient avoir un espérance nulle : une moyenne constante non nulle imposerait la présence d'un trend déterministe dans le change ce qui semble improbable. Finalement le taux de change serait une marche aléatoire, où Random Walk :

$$\Delta\ \text{change}_t = u_t, \text{ où } u_t \text{ est un bruit blanc}$$

(d) La dernière équation équivaut à $change_{t+1} = change_t + u_{t+1}$ et plus généralement mène à $change_{t+h} = change_t + u_{t+1} + u_{t+2} + \ldots + u_{t+h}$. La prévision optimale faite à une date t quelconque pour un horizon h est l'espérance conditionnelle construite en t de $change_{t+h}$. Comme u est un bruit blanc, on obtient facilement

$$E_t[change_{t+h}] = change_t$$

Quel que soit l'horizon de prévision, la prévision optimale en terme de RMSE est la dernière valeur connue, de sorte que les prévisions demandées pour le 2 juin 2020 sont de 1.11460 le 16 décembre, de 11.620 le 17 décembre et de 1.11150 le 18 décembre.
Ces résultats montrent que les variations observées sur le change jours après jours sont reproduites à l'identique sur les variations des anticipations : les chocs de court terme qui affectent le marché des change au jour le jour sont intégralement intégrés dans les prévisions : c'est ce qu'on appelle le phénomène d'hystérèse des chocs.