

- Séries Temporelles Multivariées - Entraînement  
mars 2008

Gilbert Colletaz

23 mars 2008

### Exercice

On considère les deux équations suivantes :

$$\begin{aligned}y_{1t} &= \gamma y_{2,t} + u_{1t} \\ y_{2t} &= y_{2,t-1} + u_{2t}\end{aligned}$$

avec  $E[u_{1t}u_{1s}] = 1$  pour  $t = s$  et 0 sinon,  $E[u_{2t}u_{2s}] = 2$  pour  $t = s$  et 0 sinon, et  $E[u_{1t}u_{2s}] = 0$  pour tout  $t$  et tout  $s$ .

1. si on note  $\epsilon_{1t}$  et  $\epsilon_{2t}$  les erreurs de prévision commises respectivement sur  $y_{1t}$  et  $y_{2t}$  lorsque les prévisions sont fondées seulement sur les valeurs passées de  $y_1$  et  $y_2$ , comment se définissent  $\epsilon_{1t}$  et  $\epsilon_{2t}$  en fonction de  $u_1$  et  $u_2$  ?
2. Quelle est la représentation VMA de  $(\Delta y_{1t}, \Delta y_{2t})'$  sur  $\epsilon = (\epsilon_1, \epsilon_2)'$  ?
3. Pouvez-vous donner une représentation VAR pour le couple de variables  $(\Delta y_{1t}, \Delta y_{2t})'$  ?
4. Montrer que l'on peut écrire :
$$\begin{pmatrix} \Delta y_{1t} \\ \Delta y_{2t} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & \gamma \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_{1,t-1} \\ y_{2,t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \epsilon_{1t} \\ \epsilon_{2t} \end{pmatrix}$$
5. Dans ce système, quel est le rang de la matrice  $\Pi$  sur laquelle porte le test de Johansen ? Construisez deux matrices  $\alpha$  et  $\beta$  telles que  $\alpha \beta' = \Pi$ .
6. Une variable est-elle exogène faible ?
7. Aurait-on le droit de normaliser le coefficient de  $y_{2t}$  à 1 dans l'équation de long terme ?