

- Séries Temporelles Multivariées - Exercice TD  
lundi 17 mars 2008

Gilbert Colletaz

### Exercice

On considère les 2 équations suivantes :

$$\begin{aligned}y_{1t} &= \alpha y_{2,t} + u_{1t} \\y_{2t} &= \phi y_{2,t-1} + u_{2t}\end{aligned}$$

avec  $E[u_{1t}u_{1s}] = \sigma_1^2$  pour  $t = s$  et 0 sinon,  $E[u_{2t}u_{2s}] = \sigma_2^2$  pour  $t = s$  et 0 sinon,  $E[u_{1t}u_{2s}] = 0$  pour tout  $t$  et tout  $s$ , et où  $\alpha$  et  $\phi$  sont deux constantes vérifiant notamment  $|\phi| < 1$ .

1. En posant  $y_t = (y_{1t}, y_{2t})'$ , quelle est l'écriture VAR(p) sur  $y_t$ ? En d'autres termes, dans la structure  $y_t = \sum_{i=1}^p \Phi_i y_{t-i} + v_t$ , précisez la valeur de  $p$ , le contenu des matrices  $\Phi_1, \Phi_2, \dots$  ainsi que  $\Sigma_v$ , la matrice de variance-covariance des résidus du VAR.
2. Quelle(s) condition(s) doit-on poser sur  $\alpha$  pour assurer la stationarité du VAR précédent?
3. Quelle est l'écriture VMA de  $y_t$  sur le bruit blanc  $v$ . En d'autres termes, si on considère la structure  $y_t = \Theta(L)v_t$ , quels sont les polynômes qui constituent la matrice  $\Theta$ , et leurs degrés en  $L$ ?
4.  $y_1$  est-il un prédicteur avancé de  $y_2$  et, éventuellement, à quelle(s) condition(s) ne le serait-il plus?
5.  $y_2$  est-il un prédicteur avancé de  $y_1$ , et, éventuellement, à quelle(s) condition(s) ne le serait-il plus?
6. Existe-t-il de la causalité instantanée entre  $y_1$  et  $y_2$ , et, éventuellement, à quelle(s) condition(s) peut-elle disparaître?
7. On fixe maintenant les valeurs numériques suivantes :  $\alpha = 0.2$ ,  $\phi = 0.5$ ,  $\sigma_1^2 = 3.6$ ,  $\sigma_2^2 = 10$ . Soit  $w_1$  et  $w_2$  les résidus orthogonalisés selon une décomposition de Choleski. Quelles sont leurs équations de définition?

8. Quelle est l'écriture VMA de  $y_t$  sur le bruit  $w$  ? Déterminez les 3 premiers coefficients de la réponse de  $y_1$  aux chocs  $w_1$  et  $w_2$ .
9. Quelle est la décomposition de la variance des erreurs de prévision sur  $y_1$  aux horizons 1 et 2 sur les chocs orthogonaux ?

Barème :

Q1 = 4 points, Q2 = 1 point, Q3 = 4 points, Q4 = 1 point, Q5 = 1 point,  
Q6 = 1 point, Q7 = 2 points, Q8 = 3 points, Q9 = 3 points.