- Séries Temporelles Multivariées - Correction de l'entraînement mars 2008

Gilbert Colletaz

28 mars 2008

Exercice repris à Hamilton

On considère les deux équations suivantes :

$$\begin{aligned} y_{1t} &= \gamma\, y_{2,t} + u_{1t} \\ y_{2t} &= y_{2,t-1} + u_{2t} \end{aligned}$$

avec $E[u_{1t}u_{1s}] = 1$ pour $t = s$ et 0 sinon, $E[u_{2t}u_{2s}] = 2$ pour $t = s$ et 0 sinon, et $E[u_{1t}u_{2s}] = 0$ pour tout t et tout s.

1. Pour des prévisions, il convient de ré-écrire les deux équations selon :

$$\begin{aligned} y_{1t} &= \gamma\, y_{2,t-1} + \gamma\, u_{2t} + u_{1t} \\ y_{2t} &= y_{2,t-1} + u_{2t} \end{aligned}$$

   et donc $\epsilon_{2t} = u_{2t}$ et $\epsilon_{1t} = \gamma u_{2t} + u_{1t}$.

2. On a $\Delta y_{2t} = \epsilon_{2t}$ et $\Delta y_{1t} = \gamma \Delta y_{2t} + \Delta u_{1t} = \gamma u_{2t} + u_{1t} - u_{1t-1} = \epsilon_{1t} - (\epsilon_{1t-1} - \gamma \epsilon_{2t-1})$, et donc la représentation VMA :

$$\begin{pmatrix} \Delta y_{1t} \\ \Delta y_{2t} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1-L & \gamma L \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{1t} \\ \epsilon_{2t} \end{pmatrix} = \Psi(L) \begin{pmatrix} \epsilon_{1t} \\ \epsilon_{2t} \end{pmatrix}$$

3. Pour un VAR, il faudrait avoir une écriture du type $\Phi(L)(\Delta y_{1t}, \Delta y_{2t})' = (\epsilon_{1t}, \epsilon_{2t})'$, et donc, si on part d'un VMA du type $(\Delta y_{1t}, \Delta y_{2t})' = \Psi(L)(\epsilon_{1t}, \epsilon_{2t})'$, il vient $\Phi(L) = \Psi(L)^{-1}$. Or ici, le déterminant de $\Psi(L)$ égal à $1 - L$ possède une racine unitaire et donc $\Psi(L)$ n'est pas inversible. Il n'existe donc pas de représentation VAR sur $(\Delta y_{1t}, \Delta y_{2t})'$.

4. Partant des équations initiales, si dans la première on soustrait à gauche et à droite $y_{1,t-1}$ et si l'on remplace $y_{2,t}$ par sa valeur donnée par la deuxième équation, on arrive naturellement immédiatement au résultat demandé :

$$\begin{pmatrix} \Delta y_{1t} \\ \Delta y_{2t} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & \gamma \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_{1,t-1} \\ y_{2,t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \epsilon_{1t} \\ \epsilon_{2t} \end{pmatrix} = \Pi \begin{pmatrix} y_{1,t-1} \\ y_{2,t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \epsilon_{1t} \\ \epsilon_{2t} \end{pmatrix}$$

5. Dans le système précédent le rang de Π est évidemment égal à 1. Il existe une infinité de matrices α et β. Par exemple $\alpha = (-1, 0)'$ et $\beta = (1, -\gamma)'$, ou bien encore $\alpha = (\gamma, 0)$ et $\beta = (-\gamma^{-1}, 1)'$ (si naturellement $\gamma \neq 0$).

6. Comme $\alpha(2)$ est toujours nul, on peut affirmer que y_2 est exogène faible pour les paramètres de l'équation de long terme (ici γ). En clair, en estimant seulement la loi conditionnelle de y_1 sachant y_2 on a toute l'information utile pour estimer γ : l'ajustement de la marginale de y_2 n'apporte aucune information concernant ce paramètre.

7. On a le droit de normaliser à l'unité le coefficient de n'importe quelle variable présente dans l'équation de long terme (Cf. un des deux exemples qui vient d'être donné). L'important est de ne pas croire que cette normalisation impose le choix d'une endogène dans cette équation d'équilibre.