Les Processus MA

Gilbert Colletaz

24 octobre 2019

Résumé

Ces processus sont des cas particuliers de l'écriture de Wold pour lesquels x_t n'est pas fonction de l'histoire infinie des u présent et passés mais seulement d'un nombre fini d'innovations passées. De ce fait leur étude est relativement simple et permet de se familiariser sans grande difficulté avec des notations et des outils qui seront utilisés tout au long du cours. Après quelques généralités sur les MA, on étudiera plus en détail les MA(1) et MA(2) avant de tirer des conclusions générales sur les processus MA(q), q entier positif quelconque.

Table des matières

1 Caractéristiques générales des MA

Un MA (pour Moving Average) se caractérise par sa longueur q qui est le nombre d'innovations passées sur lesquelles s'écrit la variable x :

$$X_t = \mu_X + u_t + \psi_1 u_{t-1} + \psi_2 u_{t-2} + \ldots + \psi_q u_{t-q} \tag{1}$$

C'est donc bien une écriture de Wold dans laquelle $\psi_j = 0$ si $j > q$, et c'est cette condition qui fait précisément la particularité des MA. On remarque que la variable X_t centrée obéit au même MA(q) :

$$\begin{aligned} x_t &= X_t - \mu_X, \text{ et} \\ x_t &= u_t + \psi_1 u_{t-1} + \psi_2 u_{t-2} + \ldots + \psi_q u_{t-q} \end{aligned}$$

Pour cette raison nous travaillerons souvent sur le processus centré, ce qui simplifie notamment les expressions des autocovariances.

On dit aussi que la mémoire de x est de q périodes, traduisant le fait que les informations contenues dans les valeurs retardées de plus de q périodes du processus causal u n'affectent plus la variable x.

1.1 Processus MA et stationnarité

Comme μ_X est une constante, $E(X_t) = \mu_X$ et le processus X est stationnaire en espérance. C'est aussi le cas de x, simplement $E[x_t] = 0$.
On sait qu'une condition suffisante pour qu'ils soient stationnaires du second ordre est que les coefficients de leur écriture de Wold, ψ_i, soient absolument sommables. Comme ce sont des constantes et qu'ici elles sont par définition en nombre fini, on vérifie bien évidemment $\sum_{i=1}^{q} |\psi_i| < \infty$. Un MA(q) où q est un entier positif quelconque est donc stationnaire.

1.2 L'opérateur de décalage

Noté B, pour *Backshift*, ou L pour *Lag*, cette dernière notation étant la plus couramment employée aujourd'hui, l'opérateur de décalage se définit simplement par $B^j x_t = L^j x_t = x_{t-j}$. Un de ses premiers avantages est de simplifier les écritures. En effet, si on dit que x_t obéit à un MA(q), alors on écrira :

$$\begin{aligned} x_t &= u_t + \psi_1 u_{t-1} + \psi_2 u_{t-2} + \ldots + \psi_q u_{t-q} && (2) \\ &= (1 + \psi_1 L + \psi_2 L^2 + \ldots + \psi_q L^q) u_t \\ &= \psi(L) u_t && (3) \end{aligned}$$

Ainsi, pour donner l'équation d'un MA(q), il suffira d'écrire la dernière équation ci-dessus en précisant que $\psi()$ est un polynôme en l de degré q. Si vous n'êtes pas persuadé de la simplification, écrivez par exemple l'équation d'un MA(15) selon (2) puis selon (3).

1.3 La convention de signe de Box-Jenkins

Dans leur ouvrage Box et Jenkins décident d'affecter d'un signe négatif les coefficients des innovations d'un MA. Au design de l'équation (2) il vont préférer

$$x_t = u_t - \theta_1 u_{t-1} - \theta_2 u_{t-2} - \ldots - \theta_q u_{t-q} \tag{4}$$

où les coefficients theta sont des constantes définies par $\theta_j = -\psi_j$. Nous expliquerons les raisons de leur choix lors de l'étude des processus AR. En théorie les deux versions (2) et (4) sont équivalentes et c'est surtout en pratique que l'inconvénient de ces choix de syntaxe se fait jour. On trouve actuellement pratiquement autant de publications qui utilisent la convention de signe de Box-Jenkins que de publications qui ne l'utilisent pas. Supposez que vous ayez estimé un MA(1) et que votre logiciel d'économétrie affiche $\hat{\theta}_1 = 0.8$ la question est de savoir s'il faut alors écrire $x_t = u_t - 0.8u_{t-1}$ ou $x_t = u_t + 0.8u_{t-1}$, *i.e.* il faut savoir si l'auteur de votre logiciel respecte ou non la convention de signe. On peut sur cet aspect retenir par exemple que des choix différents sont faits par SAS et R.

2 Le MA(1)

Ce qui va nous intéresser tout particulièrement ici ce sont les caractéristiques des deux outils retenus par Box et Jenkins pour l'identification des processus stochastiques : fonction d'autocorrélation et fonction d'autocorrélation partielle. Dans ce qui suit, nous utiliserons leur convention de signe

On a donc :

$$\begin{aligned} X_t &= \mu_X + u_t - \theta_1 u_{t-1}, \text{ où encore} \\ x_t &= X_t - \mu_X = u_t - \theta_1 u_{t-1} \end{aligned}$$

où u est un processus en bruit blanc de variance σ_u^2.

2.1 Fonctions d'autocovariance et d'autocorrélation

Les résultats suivants sont immédiats (et vous devez pouvoir les retrouver rapidement) :

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= var(x_t) = (1 + \theta_1^2)\sigma_u^2 \\ \gamma_1 &= cov(x_t, x_{t-1}) = E[x_t x_{t-1}] = -\theta_1 \sigma_u^2 \\ \gamma_j &= 0 \text{ si } j > 1 \end{aligned}$$

Comme $\rho_k = \gamma_k/\gamma_0$, la fonction d'autocorrélation :

$$\rho_0 = 1$$
$$\rho_1 = cor(x_t, x_{t-1}) = -\frac{\theta_1}{1+\theta_1^2}$$
$$\rho_j = cor(x_t, x_{t-j}) = 0 \text{ si } j > 1$$

Elle s'annule donc dès que l'on a dépassé la longueur, ou la mémoire, du MA(1).

2.1.1 remarque : plusieurs MA ont la même fonction d'autocorrélation

On va s'intéresser à la proposition réciproque de celle qui vient d'être montrée : si pour tout MA(1) la fonction d'autocorrélation s'annule au-delà de 1, peut-on accepter que toute séquence $\{\rho_0 = 1, -1 <= \rho_1 <= 1, \rho_j = 0, j = 2, 3, \ldots\}$ soit la fonction d'autocorrélation d'un MA(1) ?
On sait que θ_1 est un réel et que $\rho_1 = -\theta_1/(1+\theta_1^2)$ d'où $\rho_1\theta_1^2 + \theta_1 + \rho_1 = 0$. Cette équation du second degré a comme solutions

$$\theta_1^{(1)} = -\frac{1}{2\rho_1} + \frac{(1-2\rho_1)^{1/2}(1+2\rho_1)^{1/2}}{2\rho_1} \text{ et,} \tag{5}$$
$$\theta_1^{(2)} = -\frac{1}{2\rho_1} - \frac{(1-2\rho_1)^{1/2}(1+2\rho_1)^{1/2}}{2\rho_1}, \tag{6}$$

Celles-ci ne sont réelles que si $-1/2 <= \rho_1 < 1/2$. Par exemple la suite $\rho_0 = 1, \rho_1 = 0.8, \rho_j = 0$ si $j > 1$ ne peut pas être la fonction d'autocorrélation d'un MA(1) à coefficient réel. En revanche, la séquence d'autocorrélations $\rho_0 = 1, \rho_1 = 0.3, \rho_j = 0$ si $j > 1$ est donc bien celle d'un MA(1). La difficulté vient de ce qu'avec $\rho_1 = 0.3$, deux coefficients réels distincts sont obtenus : $\theta_1^{(1)} = -1/3$ et $\theta_1^{(2)} = -3$. Ainsi, les deux MA(1)

$$x_t = u_t - 1/3u_{t-1} \tag{7}$$
$$x_t = u_t - 3u_{t-1} \tag{8}$$

ont la même fonction d'autocorrélation ce qui pose naturellement un problème d'identification. Nous reviendrons sur cet aspect dans la sous-section qui suit.

2.2 La fonction d'autocorrélation partielle

On sait que cette fonction fait référence à l'écriture autorégressive du processus. Il faut donc pouvoir lui donner une telle écriture. On dira qu'un processus est inversible s'il possède une écriture autorégressive et les conditions qui vont l'autoriser constituent les conditions d'inversibilité du processus. La démarche à suivre pour trouver ces conditions est simple à comprendre. On part d'un MA(1) :

$$x_t = (1-\theta_1 L)u_t, \tag{9}$$

et admettons que l'inverse d'un polynôme en L est également un polynôme en L, et que $(1-\theta_1 L)$ possède un inverse, il vient

$$(1-\theta_1 L)^{-1}x_t = u_t \tag{10}$$

Mais si $(1-\theta_1 L)^{-1}$ est un polynôme en L, alors à gauche du signe '=' on devrait avoir des termes en x_t, x_{t-1}, $x_{t-2}, \ldots$. Dès lors, si on laisse seulement x_t à gauche et que l'on passe tous les autre x retardés à droite, on doit trouver l'écriture autorégressive recherchée. Naturellement, pour justifier cette intuition nous avons à préciser ce qu'est exactement l'inverse de $(1-\theta_1 L)$, de donner les conditions de son existence et d'en tirer les conditions d'inversibilité d'un MA(1).

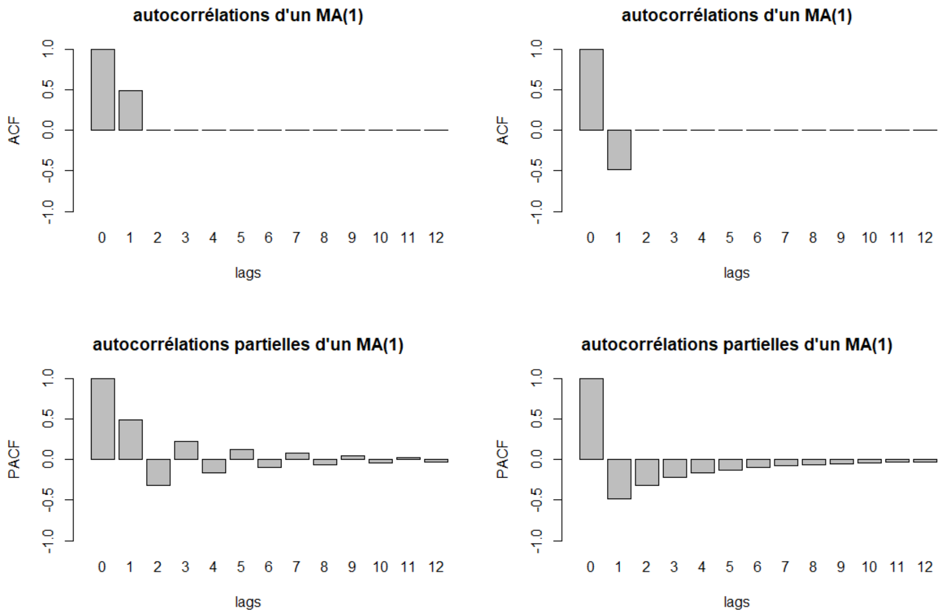
Au moins deux procédures peuvent être suivies pour trouver $(1-\theta)^{-1}$:

1. soit un ensemble infini de réels x et soit $y_t = (1-\theta L)x_t = x_t - \theta x_{t-1}$. Il vient :
$$\begin{aligned} x_t &= y_t + \theta x_{t-1} \\ &= y_t + \theta(y_{t-1} + \theta x_{t-2}) \\ &= y_t + \theta y_{t-1} + \theta^2 x_{t-2} = y_t + \theta y_{t-1} + \theta^2(y_{t-2} + \theta x_{t-3}) \\ &= y_t + \theta y_{t-1} + \theta^2 y_{t-2} + \theta^3 x_{t-3} = y_t + \theta y_{t-1} + \theta^2 y_{t-2} + \theta^3(y_{t-3} + \theta x_{t-4}) \\ &= y_t + \theta y_{t-1} + \theta^2 y_{t-2} + \theta^3 y_{t-3} + \theta^4 x_{t-4} = \ldots \\ &= \sum_{j=0}^{i} \theta^j y_{t-j} + \theta^{i+1} x_{t-i-1} \text{ pour tout entier } i > 0 \end{aligned}$$
Si on fait tendre i vers l'infini, le premier terme à droite du signe = implique que x_t n'est défini que si $|\theta| < 1$, mais alors dans ce cas $\theta^{i+1} \to 0$ et le deuxième terme disparaît. Par conséquent sous la condition $|\theta| < 1$,
$$x_t = \sum_{j=0}^{\infty} \theta^j y_{t-j} = \left[\sum_{j=0}^{\infty} \theta^j L^j\right] y_t \tag{11}$$
Par ailleurs, en reprenant l'égalité initiale, $y_t = (1-\theta L)x_t$, si $(1-\theta L)$ est inversible alors
$$x_t = (1-\theta L)^{-1} y_t \tag{12}$$
Les deux équations ci-dessus définissent x_t à partir de y_t et pour être cohérentes entre elles, il faut que l'opérateur appliqué à y_t soit le même. En conséquence, si $(1-\theta L)$ est inversible alors
$$(1-\theta L)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \theta^j L^j \tag{13}$$
et, comme le terme de droite n'existe que si $|\theta| < 1$, cette condition devient également une condition d'existence de l'inverse du polynôme de degré 1. Au final, un polynôme de degré 1 est inversible si son coefficient est en valeur absolue inférieur à l'unité, et cet inverse est un polynôme de degré infini.
2. Vous posez la division $\frac{1}{1-\theta L}$ comme en classe de primaire, il vient : $\frac{1}{1-\theta L} = 1 + \theta L + \theta^2 L^2 + \ldots = \sum_{j=0}^{\infty} \theta^j L^j$ ce qui donne évidemment le même résultat et la même condition d'existence de l'inverse que précédemment.

Grâce à ce résultat, partant de l'écriture du MA(1), $x_t = (1-\theta L)u_{t-1}$, si $|\theta| < 1$ on a une écriture équivalente pour x :
$$\begin{aligned} &(1-\theta L)^{-1} x_t = u_t \\ \Leftrightarrow &\sum_{j=0}^{\infty} \theta^j L^j x_t = u_t \\ \Leftrightarrow\ & x_t = -\sum_{j=1}^{\infty} \theta^j L^j x_t + u_t \\ \Leftrightarrow\ & x_t = -\theta x_{t-1} - \theta^2 x_{t-2} - \ldots + u_t \end{aligned}$$
En d'autres termes le MA(1) possède une écriture autorégressive infinie équivalente. On dit alors que le MA est inversible, et la condition pour avoir un MA(1) inversible est donc que $|\theta| < 1$.

Pour notre propos, l'avantage d'avoir cette écriture autorégressive infinie est qu'elle montre que tout x antérieur à la date t est alors une variable explicative de x_t. Comme l'autocorrélation partielle d'ordre p est le coefficient de x_{t-p} lorsque x_t est expliqué par $x_{t-1}, x_{t-2}, \ldots, x_{t-p}$. Elle est donc extraite d'un modèle faux (autorégressif de longueur finie alors que le vrai est de longueur infinie) mais dans lequel toutes les explicatives sont présentes dans le modèle vrai. En conséquence, il n'y a pas de raison pour que leurs coefficients s'annulent et en particulier on aura $\phi_{pp} \neq 0$ et cela pour toute valeur de p aussi grande soit-elle puisque x_{t-p} sera toujours dans le modèle vrai. Pour autant, on aura aussi $\lim \phi_{pp} = 0$ si $p \to \infty$: la dépendance de x_t à x_{t-k} doit tendre à s'annuler lorsque la distance temporelle séparant les deux variables augmente. En d'autres termes pour un MA(1) inversible, du fait de son écriture AR(∞), la fonction d'autocorrélation partielle ne s'annule pas mais tend vers zéro avec k.

Le paragraphe précédent énonce l'évolution générale de la fonction d'autocorrélation partielle de tout MA(1). Si on veut connaître précisément les valeurs de cette fonction pour un MA(1) particulier, il suffit de connaître ses autocorrélations et d'utiliser les équations de Yule-Walker.



$x_t = u_t + 0.8u_{t-1}$ $\qquad$ $x_t = u_t - 0.8u_{t-1}$

FIGURE 1 – Exemples de corrélogrammes associés à des MA(1)

2.3 Illustration

Si on intègre dans l'écriture matricielle de ces équations les contraintes portant sur les autocorrélations d'un MA(1) : $\rho_1 = 1, \rho_1 \neq 0, \rho_j = 0, j = 2, 3, \ldots$, il vient :

$$\begin{pmatrix} \phi_{k1} \\ \phi_{k2} \\ \vdots \\ \phi_{k2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \rho_1 & 0 & \ldots & 0 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \ldots & 0 \\ 0 & \rho_1 & 1 & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \rho_1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si on résout ce système pour des valeurs successives de k, on obtient,

$\phi_{11} = \rho_1$	ou	$\phi_{11} = -\frac{\theta_1}{1+\theta_1^2}$
$\phi_{22} = \frac{\rho_1^2}{\rho_1^2-1}$	ou	$\phi_{22} = -\frac{\theta_1^2}{1+\theta_1^2+\theta_1^4}$
$\phi_{33} = \frac{\rho_1^2}{1-2\rho_1^2}$	ou	$\phi_{22} = -\frac{\theta_1^3}{1+\theta_1^2+\theta_1^4+\theta_1^6}$
et plus généralement		$\phi_{kk} = -\frac{\theta_1^k}{1+\theta_1^2+\theta_1^4+\theta_1^6+\ldots+\theta_1^{2k}}$

Ainsi les coefficients d'autocorrélation partielle vont décroître avec k, ce qui confirme l'intuition énoncée dans la sous-section précédente, et seront soit tous négatifs si $\theta_1 > 0$, soit alterneront en signe si $\theta_1 < 0$. Ils seront toujours inférieurs à 1 en valeur absolue et cela même si le processus est non inversible, i.e. si les coefficients des valeurs retardées de x dans l'écriture autorégressive infinie ont tendance à exploser.
La figure 1 illustre les principaux enseignements de cette section.

2.4 MA inversible et condition d'identification

Nous avons montré précédemment, Cf. équations (7) et (8) que la structure de corrélation $\rho_1 = 1, \rho_1 = 0.3, \rho_j = 0$ si $j > 1$ correspondait à deux MA(1) et non pas un seul :

$$\begin{aligned} x_t &= u_t - 1/3u_{t-1} \\ x_t &= u_t - 3u_{t-1} \end{aligned}$$

Naturellement si on veut comme Box et Jenkins utiliser la fonction d'autocorrélation comme outil d'identification d'un processus, l'absence de bijection entre une structure d'autocorrélation et un processus est malheureuse. Pour résoudre cette difficulté, l'idée va être d'imposer une condition sur les processus que l'on va sélectionner. On peut alors montrer que si on exige de retenir uniquement des MA inversibles alors la bijection est établie. On ne va pas démontrer cette proposition, mais simplement vérifier qu'elle fonctionne dans le cas du MA(1). En effet, pour qu'un MA(1) soit inversible, i.e. possède une écriture autorégressive, il faut que son coefficient soit, en valeur absolue, inférieur à l'unité. Dans l'exemple précédent cela exclut le processus $x_t = u_t - 3u_{t-1}$ et on retiendrait une seule écriture : $x_t = u_t - 1/3u_{t-1}$.
Plus généralement, si vous reprenez les deux racines $\theta_1^{(1)}$ et $\theta_1^{(2)}$, vous pouvez aisément montrer que leur produit est égal à l'unité : si l'une est supérieur à 1 en valeur absolue, l'autre est inférieure. Il existera donc toujours un processus MA(1) inversible unique associé à une structure d'autocorrélation valide.

3 Le MA(2)

Ici X_t a une mémoire de longueur 2 puisqu'il est définit sur deux valeurs retardées du bruit blanc u :

$$X_t = \mu_X + u_t - \theta_1 u_{t-1} - \theta_2 u_{t-2}, \text{ ou encore} \tag{14}$$
$$x_t = X_t - \mu_X = u_t - \theta_1 u_{t-1} - \theta_2 u_{t-2} \tag{15}$$

avec $var(u_t) = \sigma_u^2$ et $E[X_t] = \mu_X$ constante.

On va suivre la même démarche que lors de l'étude du MA(1) : calcul des autocovariances pour trouver sa fonction d'autocorrélation puis étude de sa fonction d'autocorrélation partielle.

3.1 Fonctions d'autocovariance et d'autocorrélation

Ici encore les résultats suivants sont immédiats (et vous devez pouvoir les retrouver rapidement) :

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= var(x_t) = (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)\sigma_u^2 \\ \gamma_1 &= cov(x_t, x_{t-1}) = E[x_t x_{t-1}] = (-\theta_1 + \theta_1\theta_2)\sigma_u^2 \\ \gamma_2 &= cov(x_t, x_{t-2}) = E[x_t x_{t-2}] = -\theta_2\sigma_u^2 \\ \gamma_j &= 0 \text{ si } j > 2 \end{aligned}$$

En conséquence sa fonction d'autocorrélation est :

$$\begin{aligned} \rho_0 &= 1 \\ \rho_1 &= \frac{-\theta_1 + \theta_1\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2} \\ \rho_2 &= \frac{-\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2} \\ \rho_j &= 0 \text{ si } j > 2 \end{aligned}$$

Comme pour le MA(1), elle s'annule dès que l'on a dépassé la mémoire du processus, la raison étant évidemment que les sous-ensembles de u définissant x_t d'une part et $x_{t-j}, j > 2$ d'autre part ont une intersection nulle.

Rappelons encore que pour l'identification d'un MA à partir d'une structure d'autocorrélation donnée, on doit travailler avec des MA inversibles, i.e. qui ont une écriture autorégressive. Les conditions de cette unicité du MA(2) sont aisément mises en évidence : Soit $(1 - \theta_1 L - \theta_2 L^2)$, le polynôme caractéristique d'un MA. En le factorisant sur ses racines notées ω_1 et ω_2 on peut écrire :

$$(1 - \theta_1 L - \theta_2 L^2) = (1 - \omega_1^{-1} L)(1 - \omega_2^{-1} L)$$

et donc le polynôme caractéristique est inversible si chacun des polynômes de degré 1 ci-dessus est inversible puisqu'alors :

$$(1-\omega_1^{-1}L)^{-1}(1-\omega_2^{-1}L)^{-1} = (1-\theta_1 L - \theta_2 L^2)^{-1}$$

On sait déjà que c'est le cas si $||\omega_1^{-1}|| < 1$ et $||\omega_1^{-1}|| < 1$, soit encore si $||\omega_1|| > 1$ et $||\omega_1|| > 1$. En outre, comme chacun de ces inverses est un polynôme en L de degré infini, on peut conclure que l'inverse du polynôme de degré 2 est aussi de degré infini. Enfin, sous ces conditions on obtient l'écriture autorégressive du MA(2) puisqu'alors :

$$\underbrace{x_t = \underbrace{(1-\theta_1 L - \theta_2 L^2)}_{\text{degré 2 en L}} u_t}_{x_t \text{ écrit comme MA(2)}} \Leftrightarrow \underbrace{\underbrace{(1-\theta_1 L - \theta_2 L^2)^{-1}}_{\text{degré infini en L}} x_t = u_t}_{x_t \text{ écrit comme AR}(\infty)}$$

En résumé le processus MA(2) est inversible si les racines de son polynôme caractéristique, qui peuvent être complexes, sont de module supérieur à l'unité et dans ce cas, à une structure de corrélation valide correspond un et un seul processus MA(2) inversible. Pour terminer cette section, on peut encore remarquer que la condition portant sur les racines, ω_1 et ω_2 du polynôme caractéristique peut être transposée sur les coefficients θ_1 et θ_2 de ce polynôme. Dans ce cas, on montre que le processus est inversible si les 3 conditions suivantes sont vérifiées :

$$\begin{aligned} \theta_1 + \theta_2 &< 1 \\ \theta_2 - \theta_1 &< 1 \\ -1 < \theta_1 &< 1 \end{aligned}$$

3.2 Fonction d'autocorrélation partielle

Si on connaît les autocorrélations, alors les valeurs des autocorrélations partielles sont obtenues en résolvant le système des équations de Yule-Walker :

$$\begin{pmatrix} \phi_{k1} \\ \phi_{k2} \\ \phi_{k3} \\ \phi_{k4} \\ \vdots \\ \phi_{k2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & 0 & \dots & 0 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \rho_2 & \dots & 0 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 & \rho_1 & \dots & 0 \\ 0 & \rho_2 & \rho_1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, k = 1, 2, \dots$$

Les expressions obtenues sont rapidement complexes. Cependant comme pour le MA(1) on peut deviner l'évolution de cette fonction : si le MA(2) est inversible alors c'est un AR(∞) et en conséquence les coefficients des autorégressions tronquées qui font apparaître les autocorrélations partielles ne s'annuleront pas mais vont tendre vers zéro avec k. Cette convergence sera de type exponentielle si les racines ω_1 et ω_2 sont réelles et sinusoïdale si elles sont complexes.
Vous trouvez dans la Figure 2 des corrélogrammes illustrant ces différentes possibilités.

4 Le MA(q)

Il s'agit simplement de généraliser les résultats obtenus sur les MA(1) et MA(2) aux MA(q) où q est un entier positif quelconque. Soit

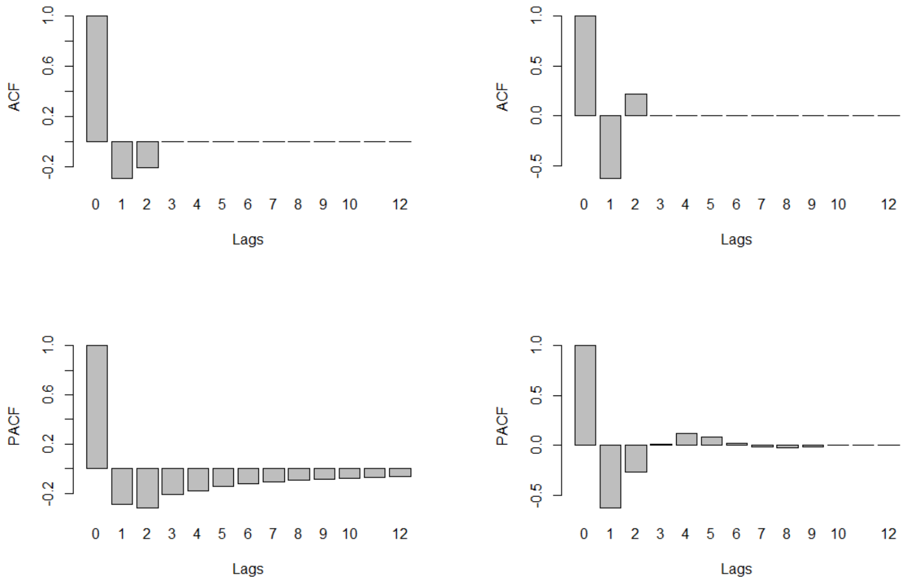
$$X_t = \mu_X + u_t - \theta_1 u_{t-1} - \theta_2 u_{t-2} - \dots - \theta_q u_{t-q}, \text{ ou encore} \tag{16}$$

$$x_t = X_t - \mu_X = u_t - \theta_1 u_{t-1} - \theta_2 u_{t-2} - \dots - \theta_q u_{t-q} \tag{17}$$

Le processus est inversible si les racines de $(1 - \theta_1 z_1 - \theta_2 z^2 \dots - \theta_q z^q)$ sont situées strictement en dehors du disque unitaire complexe. Ce résultat s'obtient en factorisant le polynôme caractéristique sur ses q racines :

$$(1 - \theta_1 L - \theta_2^2 - \dots - \theta_q L^q) = (1-\omega_1^{-1}L)(1-\omega_2^{-1}L^2)\dots(1-\omega_q^{-1}L^q) \tag{18}$$

On voit qu'il est inversible si chacun des polynômes de degré 1 en L est inversible ce qui exige $||w_i|| > 1$. Par ailleurs comme l'inverse de chacun de ces polynômes élémentaires est de degré infini en L, c'est évidemment le cas de l'inverse du polynôme caractéristique : un MA(q) inversible possède une écriture AR(∞) équivalente.



MA(2) à racines réelles
$x_t = u_t - 0.6u_{t-1} - 0.3u_{t-2}$
$\omega_1 = 1.08$, $\omega_2 = -3.08$

MA(2) à racines complexes
$x_t = u_t - 0.8u_{t-1} + 0.4u_{t-2}$
$\omega_1 = 1 - 1.22i$, $\omega_2 = 1 + 1.22i$

FIGURE 2 – Exemples de corrélogrammes associés à des MA(2)

4.1 Fonctions d'autocovariance et d'autocorrélation

Vous pouvez vérifier que sa fonction d'autocovariance est donnée par :

$$\gamma_k = \begin{cases} (1+\theta_1^2+\ldots\theta_q^2)\sigma_u^2 \text{ pour } k=0, \\ (-\theta_k+\theta_1\theta_{k+1}+\theta_2\theta_{k+2}+\ldots+\theta_q\theta_{q-k})\sigma_u^2 \text{ pour } k=1,2,\ldots,q \\ 0 \text{ si } k>q \end{cases} \quad (19)$$

Sa fonction d'autocorrélation est donc :

$$\gamma_k = \begin{cases} \frac{-\theta_k+\theta_1\theta_{k+1}+\theta_2\theta_{k+2}+\ldots+\theta_q\theta_{q-k}}{1+\theta_1^2+\theta_2^2+\ldots+\theta_q^2}, k=1,2,\ldots,q \\ 0 \text{ si } k>q \end{cases} \quad (20)$$

Pour une raison que l'on connaît, elle s'annule dès que la mémoire du processus est dépassée.

4.2 Fonction d'autocorrélation partielle

Les valeurs de ϕ_{kk} sont trouvées en résolvant les équations de Yule-Walker. Les expressions sont rapidement de plus en plus complexes au fur et à mesure que k augmente. Il faut essentiellement se souvenir

- qu'elle ne s'annule pas, et la raison est que x possède une écriture autorégressive infinie.
- que la suite des ϕ_{kk} converge vers zéro, c'est également une conséquence de l'hypothèse d'inversibilité.
- que la convergence précédente est soit de type exponentielle si les racines du polynôme caractéristique du MA(q) sont réelles, elle est de type sinusoïdale si les racines sont complexes.