Les Processus ARMA

Gilbert Colletaz

24 octobre 2019

Résumé

Ces modèles généralisent les deux classes précédentes puisqu'ils comportent à la fois une composante autorégressive et une composante moyenne mobile. Leur analyse ne pose pas de difficulté particulière qui n'ait pas été rencontrée lors de l'étude des MA(q) et AR(p). Dans ce bref résumé, on énoncera quelques généralités sur les ARMA(p,q). Par la suite, on se contentera d'énumérer des résultats relatifs au plus simple de ces processus, le ARMA(1,1), en vous laissant faire, à titre d'exercice, les démonstrations de ces résultats. Pour terminer, on présentera un nouvel outil d'identification, la fonction d'autocorrélation inverse avant de rappeler les évolutions attendues des trois fonctions de corrélation, évolutions qui dans la démarche de Box-Jenkins permettent d'identifier le processus gouvernant l'évolution d'une série stationnaire observée.

Table des matières

1 Caractéristiques générales des ARMA(p,q)

Un ARMA(p,q) se caractérise par une composante autorégressive de longueur p et une composante moyenne mobile d'ordre q. Il s'écrit donc :

$$X_t = c + \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \ldots + \phi_p X_{t-p} + u_t - \theta_1 u_{t-1} - \theta_2 u_{t-2} \ldots - \theta_q u_{t-q} \tag{1}$$

ou encore :

$$\phi(L)X_t = c + \theta(L)u_t, \text{ avec} \tag{2}$$
$$\phi(L) = (1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \ldots - \phi_p L^p), \text{ et} \tag{3}$$
$$\theta(L) = (1 - \theta_1 L - \theta_2 L^2 - \ldots - \theta_q L^q) \tag{4}$$

avec u processus bruit blanc et c une constante. Vous noterez le traitement similaire des signes des coefficients dans les deux polynômes en L des équations (3) et (4) : les coefficients ϕ ou θ sont tous affectés d'un signe négatif. Cette similitude résulte de ce que les θ de l'équation (1) sont affectés d'un signe négatif ce qui est la convention de signe de Box-Jenkins. Cette dernière a donc pour avantage d'autoriser un traitement homogène des signes des coefficients dans les écritures des polynômes caractéristiques des AR et des MA.

Avec (1), on peut voir que la classe des processus ARMA contient les classes MA et AR. en effet :

$$X_t \sim MA(q) \Leftrightarrow X_t \sim ARMA(0,q), \text{ et}$$
$$X_t \sim AR(p) \Leftrightarrow X_t \sim ARMA(p,0)$$

On sait d'une part que les MA sont stationnaires mais pas toujours inversibles et que, d'autre part, les AR sont inversibles mais pas toujours stationnaires. Comme les ARMA combinent les deux modélisations, il convient de préciser leur comportement au regard de ces deux caractéristiques.

— Remarque : la représentation minimale d'un ARMA(p,q)
On montre aisément que si x obéit à un ARMA(p,q) d'écriture $\phi(L)x_t = \theta(L)u_t$ alors il obéit également à un ARMA(p+1,q+1), ARMA(p+2,q+2),.... En effet, pour tout réel λ non nul,

$$\underbrace{\phi(L)}_{d^o p} x_t = \underbrace{\theta(L)}_{d^o q} u_t \Rightarrow (1-\lambda L)\phi(L)x_t = (1-\lambda L)\theta(L)u_t$$
$$\Downarrow$$
$$\underbrace{\phi^*(L)}_{d^o p+1} x_t = \underbrace{\theta^*(L)}_{d^o q+1} u_t$$

La réciproque n'est vraie que si les polynômes autorégressif et moyenne mobile de l'ARMA(p,q) ont au moins une racine commune. Ainsi, dans les écritures ci-dessus, on ne peut remonter de la dernière égalité, décrivant l'ARMA(p+1,q+1), à la première que si $\phi^*(L)$ et $\theta^*(L)$ ont un facteur commun, et donc une racine commune, égale à λ^{-1}. On appelle représentation minimale d'un ARMA(p,q) le modèle pour lequel le polynôme représentatif de la partie AR et celui de la partie MA sont de degrés respectifs p et q et n'ont pas de racine commune. En pratique, lorsqu'on fait référence à un ARMA(p,q) il s'agit de cette représentation minimale.
On vous laisse ainsi vérifier que
— Le modèle $(1-1.4L+0.48L^2)x_t = (1-0.4L)u_t$ est appelé ARMA(2,1)
— Le modèle $(1-1.4L+0.48L^2)x_t = (1-0.8L)u_t$ est appelé AR(1) et non pas ARMA(2,1)

1.1 ARMA(p,q) stationnaire

Il s'agit de retrouver l'écriture de Wold puisque, si X_t est stationnaire alors il a une écriture unique sur le bruit blanc u. A l'évidence, partant de (2), si $\phi(L)$ est inversible alors on a une écriture équivalente :

$$X_t = \phi(L)^{-1}\theta(L)u_t \tag{5}$$

comme $\phi(L)^{-1}$ est de degré infini en L, cette dernière équation est bien une écriture de Wold, et la seule condition que nous avons imposée pour la trouver est que l'inverse de $\phi(L)$ existe. Ainsi, un ARMA(p,q) est stationnaire si les racines du polynôme caractéristique de sa composante AR sont en module supérieures à l'unité.

On vous laisse montrer que si X_t est stationnaire, alors :

$$\mu_X = \frac{c}{1-\phi_1-\phi_2-\ldots\phi_p} \text{ ou encore,}$$
$$c = \mu_X(1-\phi_1-\phi_2-\ldots\phi_p)$$

on retrouve la relation déjà mise en évidence sur les AR entre la constante présente dans l'équation du processus et l'espérance de X. Si X n'est pas centrée, il est nécessaire de mettre une constante non nulle dans l'équation de l'ARMA(p,q) et réciproquement.

1.2 ARMA(p,q) inversible

La question est maintenant de retrouver une écriture autorégressive pour X_t. Toujours à partir de (2), si $\theta(L)$ est inversible alors on a une écriture équivalente :

$$\theta(L)^{-1}\phi(L)X_t = u_t \tag{6}$$

et comme $\theta(L)^{-1}$ est de degré infini en L, cette dernière équation est implicitement celle d'un AR(∞). Au final, pour retrouver l'écriture autorégressive sur X_t, la seule condition est que $\theta(L)$ soit inversible, c'est-à-dire que les racines du polynôme représentatif de sa partie MA soient en module supérieures à 1.

2 Le processus ARMA(1,1)

Si $X_t \sim ARMA(1,1)$ n'est pas centré alors, pour simplifier les écritures, nous considérons $x_t = X_t - \mu_X$. On vous laisse montrer que x est gouverné par le même ARMA(1,1) que X_t, la seule différence étant la disparition de la constante. On a donc :

$$x_t = \phi_1 x_{t-1} + u_t - \theta_1 u_{t-1} \tag{7}$$

avec,

- pour que le processus soit stationnaire :$|\phi_1| < 1$,
- pour que le processus soit inversible : $|\theta_1| < 1$.

2.1 fonctions d'autocovariance et d'autocorrélation

On montre (...vous montrez...) que :

$$\begin{aligned}
\gamma_0 &= \frac{1+\theta_1^2 - 2\phi_1\theta_1}{1-\phi_1^2}\sigma_u^2 \\
\gamma_1 &= \phi_1\gamma_0 - \theta_1\sigma_u^2 \\
\gamma_k &= \phi_1\gamma_{k-1} \\
&= \phi_1^{k-1}\gamma_1 \text{ pour } k > 1
\end{aligned}$$

La fonction d'autocorrélation est alors :

$$\rho_0 = 1 \tag{8}$$

$$\rho_1 = \phi_1 - \frac{\theta_1(1-\phi_1^2)}{1+\theta_1^2 - 2\phi_1\theta_1} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
\rho_k &= \phi_1\rho_{k-1} \\
&= \phi_1^{k-1}\rho_1 \text{ pour } k > 1
\end{aligned} \tag{10}$$

On peut remarquer que l'équation (10) est valide pour le processus AR(1). Ceci est un cas particulier d'un résultat plus général : la fonction d'autocorrélation d'un ARMA(p,q) est identique à celle d'un AR(p) pour les ordres supérieurs à q. En d'autres termes une fois dépassée la longueur de la composante MA(q), on retrouve sur l'ARMA(p,q) la fonction d'autocorrélation de l'AR(p).
En conséquence, la fonction d'autocorrélation d'un ARMA(1,1) ne s'annule jamais, mais converge vers zéro avec k.

2.2 la fonction d'autocorrélation partielle

On peut naturellement injecter les valeurs des corrélations dans les équations de Yule-Walker pour trouver celles des corrélations partielles. Le plus intéressant pour l'identification est toutefois d'avoir déjà une idée de l'évolution de cette fonction. Or, si le processus ARMA(1,1) est inversible, il a une écriture AR(∞) équivalente. On sait qu'alors la fonction d'autocorrélation partielle ne s'annulera jamais puisque pour cela il faudrait dépasser l'ordre du processus AR, ce qui est bien évidemment impossible. La suite des coefficients ϕ_{kk} va donc simplement converger vers zéro selon un schéma proche de celui que l'on observerait avec un MA(1).

La figure 1 présente des corrélogrammes caractéristiques de processus ARMA(1,1). On peut déjà noter que les outils d'identification que sont les deux fonctions de corrélation auront une efficacité très limitée dans le cas des ARMA. Contrairement aux deux classes précédemment étudiées, MA(q) et AR(p), où la décroissance sur l'une et l'annulation sur l'autre identifient à la fois la classe du processus et, dans cette classe, l'ordre du processus à retenir, ici leur décroissance simultanée devrait permettre d'identifier la classe mais ne révélera pas de façon simple les valeurs des ordres p et q. Par ailleurs si l'une des fonctions décroît très rapidement, on risque de confondre cette décroissance avec une annulation et donc le processus ARMA avec un AR ou un MA.

2.3 les écritures MA(∞) ou AR(∞)

Dans cette brève section on indique comment calculer les coefficients du MA(∞) ou du AR(∞) équivalent à un ARMA(1,1) à partir des coefficients des polynômes caractéristiques, θ_1 et ϕ_1.

On part de l'équation usuelle de base :

$$(1-\phi_1 L)x_t = (1-\theta_1 L)u_t$$

— Si ce ARMA(1,1) est stationnaire alors il s'écrit aussi comme un MA(∞) obtenu par :

$$x_t = (1-\phi_1 L)^{-1}(1-\theta_1 L)u_t = (1-\psi(L))u_t$$

où $\psi(L)$ est de degré infini. De l'égalité précédente on déduit immédiatement que :

$$\begin{aligned}(1-\theta_1 L) &= (1-\phi_1 L)(1-\psi(L))\\ (1-\theta_1 L) &= (1-\phi_1 L)(1-\psi_1 L-\psi_2 L^2-\ldots)\end{aligned}$$

La dernière égalité ne peut être valide que si les coefficients associés à une même puissance de L sont les mêmes dans le membre de droite et dans celui de gauche. En conséquence :

$$\begin{array}{llll}\text{pour } L : & -\theta_1 = -\phi_1 - \psi_1 & \Rightarrow & \psi_1 = \phi_1 - \theta_1\\ \text{pour } L^2 : & 0 = -\psi_2 + \psi_1\phi_1 & \Rightarrow & \psi_2 = (\phi_1-\theta_1)\phi_1\\ \vdots & & & \\ \text{pour } L^k : & 0 = -\psi_k + \psi_1\phi_{k-1} & \Rightarrow & \psi_k = (\phi_1-\theta_1)\phi^{k-1}\end{array}$$

— Si le ARMA(1,1) est inversible, il possède une écriture autorégressive infinie équivalente :

$$\begin{aligned}(1-\theta_1 L)^{-1}(1-\phi_1 L)x_t &= u_t\\ (1-\pi(L)x_t &= u_t\end{aligned}$$

avec $(1-\pi(L) = (1-\theta_1 L)^{-1}(1-\phi_1 L) = (1-\pi_1 L-\pi_2 L^2-\ldots)$. En conséquence :

$$(1-\phi_1 L) = (1-\theta_1 L)(1-\pi_1 L-\pi_2 L^2-\ldots)$$

Comme au point précédent, si on égalise les coefficients des puissances de L des membres de gauche et de droite, il vient :

$$\begin{array}{llll}\text{pour } L : & -\phi_1 = -\pi_1 - \theta_1 & \Rightarrow & \pi_1 = \phi_1 - \theta_1\\ \text{pour } L^2 : & 0 = -\pi_2 + \pi_1\theta_1 & \Rightarrow & \pi_2 = (\phi_1-\theta_1)\theta_1\\ \vdots & & & \\ \text{pour } L^k : & 0 = \pi_k - \pi_{k-1}\theta_1 & \Rightarrow & \pi_k = (\phi_1-\theta_1)\theta^{k-1}\end{array}$$

— Il est évident que l'on peut aussi effectuer les divisions polynomiales à la main pour calculer par exemple quelques-uns des premiers coefficients des polynômes $\psi(L)$ et $\pi(L)$ puisque :

$$\begin{aligned}(1-\psi(L)) &= \frac{(1-\theta_1 L)}{(1-\phi_1 L)}, \text{ et}\\ (1-\pi(L)) &= \frac{(1-\phi_1 L)}{(1-\theta_1 L)}\end{aligned}$$

Enfin, si on dispose de R, il est encore préférable de savoir utiliser la fonction ARMAtoMA.

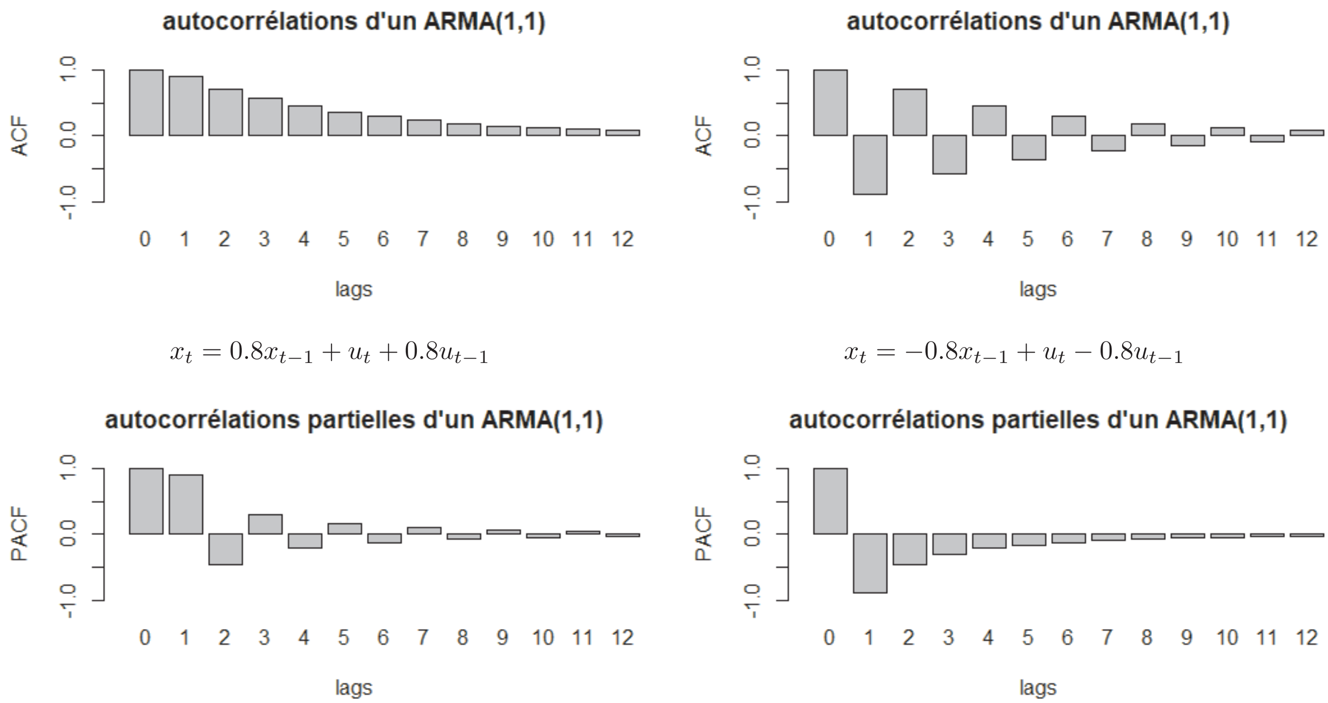
3 Le processus ARMA(p,q)

3.1 les fonctions d'autocorrélation et d'autocorrélation partielle

On se contente d'énoncer les caractéristiques des deux fonctions usuelles :

— Si X_t est un ARMA(p,q) stationnaire alors c'est également un MA(∞)
$\Rightarrow$ sa fonction d'autocorrélation ne s'annule pas mais converge vers zéro.

— Si X_t est un ARMA(p,q) inversible alors c'est également un AR(∞)
$\Rightarrow$ sa fonction d'autocorrélation partielle ne s'annule pas mais converge vers zéro.



$x_t = 0.8x_{t-1} + u_t + 0.8u_{t-1}$ $\qquad$ $x_t = -0.8x_{t-1} + u_t - 0.8u_{t-1}$

FIGURE 1 – Exemples de corrélogrammes associés à des AR(1)

3.2 la fonction de corrélation inverse

Introduite par Cleveland en 1972 dans le domaine des fréquences, elle est reconsidérée au moyen des corrélations usuelles par Chatfield en 1979. En pratique cette fonction est complémentaire des fonctions d'autocorrélation et d'autocorrélation partielle et il arrive que l'une présente des informations plus visibles que les deux autres. Les trois sont donc utiles dans la phase d'identification.

On définit d'abord le processus dual d'un ARMA(p,q) inversible : si $\phi(L)x_t = \theta(L)u_t$ est un ARMA inversible, alors $\theta(L)y_t = \phi(l)u_t$ définit un ARMA(q,p) qui est appelé processus dual du premier. La fonction d'autocorrélation de ce processus dual est la fonction d'autocorrélation inverse de x_t.

Pour l'identification du processus afférent à x, cette autocorrélation inverse est surtout utile dans le cadre des MA(q) et des AR(p). En effet l'autocorrélation inverse d'un AR(p) doit être l'autocorrélation d'un MA(p), i.e. elle s'annule après p retards ; quant à l'autocorrélation inverse d'un MA(q), c'est l'autocorrélation d'un AR(q) et elle doit converger régulièrement vers zéro. La fonction d'autocorrélation inverse d'un ARMA(p,q) doit décroître régulièrement et n'est donc pas plus utile que les deux autres pour la détermination des ordres du processus.
La table 1 résume les résultats obtenus jusqu'ici sur les fonctions d'autocorrélation, d'autocorrélation partielle et d'autocorrélation inverse des trois classes de processus étudiées, MA(q), AR(p) et ARMA(p,q).

processus	autocorrélations	autocorrélations partielles	autocorrélations inverses
MA(q) inversible	$ACF(k) = 0$ si $k > q$ $\lim_{k\to\infty} PACF(k) = 0$	$PACF(k) \neq 0$ $\lim_{k\to\infty} PACF(k) = 0$	$IACF(k) \neq 0$ $\lim_{k\to\infty} IACF(k) = 0$
AR(p) stationnaire	$ACF(k) \neq 0$ $\lim_{k\to\infty} ACF(k) = 0$	$PACF(k) = 0$ si $k > p$	$IACF(k) = 0$ si $k > p$
ARMA(p,q) stationnaire et inversible	$ACF(k) \neq 0$ $\lim_{k\to\infty} ACF(k) = 0$	$PACF(k) \neq 0$ $\lim_{k\to\infty} PACF(k) = 0$	$IACF(k) \neq 0$ $\lim_{k\to\infty} IACF(k) = 0$

TABLE 1 – Évolutions des autocorrélations des processus MA(q), AR(p) et ARMA(p,q)