

Les Processus AR

Gilbert Colletaz

10 octobre 2018

Résumé

Ces modèles autorégressifs sont utilisables pour représenter des processus stationnaires qui, contrairement aux MA(q), ont une écriture de Wold faisant appel à l'histoire infinie du bruit blanc, i.e. pour lesquels les coefficients ψ_i ne s'annulent pas au-delà d'un certain rang. Comme pour l'étude des MA, après quelques généralités sur ces processus AR, on examinera plus en détail les processus AR(1) et AR(2) avant de tirer des conclusions générales sur les AR(p) où p est un entier positif quelconque.

Table des matières

1	Caractéristiques générales des AR	1
1.1	processus AR et stationnarité	2
2	Le processus AR(1)	2
2.1	fonctions d'autocovariance et d'autocorrélation	3
2.2	fonction d'autocorrélation partielle	3
3	Le processus AR(2)	3
3.1	fonctions d'autocovariance et d'autocorrélation	4
3.2	fonction d'autocorrélation partielle	4
4	Le processus AR(p)	5

1 Caractéristiques générales des AR

Un AR (pour *AutoRegressive model*) se caractérise par sa longueur p qui est le nombre d'innovations de valeurs retardées de la variable x sur lesquelles s'écrit la variable x contemporaine, soit :

$$X_t = c + \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \dots + \phi_p X_{t-p} + u_t \quad (1)$$

avec u processus bruit blanc.

On rappelle que cette variable X est supposée a priori stationnaire du second ordre. En particulier, l'espérance de X est une constante : $\forall t, E[X_t] = \mu_X$. On peut rapidement voir que si $\mu_u \neq 0$, alors la présence d'une constante c est requise dans l'écriture du processus. En effet, en prenant l'espérance de X_t dans (1), il vient :

$$\begin{aligned} \mu_X &= c + \phi_1 \mu_X + \phi_2 \mu_X + \dots + \phi_p \mu_X \\ \Rightarrow \mu_X &= \frac{c}{1 - \phi_1 - \phi_2 - \dots - \phi_p} \\ \Leftrightarrow c &= \mu_X (1 - \phi_1 - \phi_2 - \dots - \phi_p) \end{aligned} \quad (2)$$

Ainsi, la constante dans l'écriture (1) est non nulle si la variable X n'est pas centrée, et réciproquement s'il y a une constante non nulle c dans l'écriture du processus AR(p), alors X n'est pas centrée. Rappelez-vous également que contrairement aux MA, la constante qui apparaît dans l'écriture du processus n'est pas son espérance.

Comme pour les MA, on préférera travailler avec une variable centrée afin de simplifier les équations, notamment pour le calcul des covariances. Soit donc la variable centrée $x_t = X_t - \mu_X$, ou encore $X_t = x_t + \mu_X$. En remplaçant X par sa valeur dans (1), on a

$$\begin{aligned}
x_t + \mu_X &= c + \phi_1(x_{t-1} + \mu_X) + \phi_2(x_{t-2} + \mu_X) + \dots + \phi_p(x_{t-p} + \mu_X) + u_t \\
&\Leftrightarrow x_t = \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + \dots + \phi_p x_{t-p} + \underbrace{c - (1 - \phi_1 - \phi_2 - \dots - \phi_p)\mu_X}_{=0 \text{ d'après (2)}} + u_t \\
&\Leftrightarrow x_t = \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + \dots + \phi_p x_{t-p} + u_t
\end{aligned} \tag{3}$$

Ainsi, X et x obéissent au même AR(p) ce qui justifie que l'étude des AR se fasse sur le processus centré si cela est plus simple. En outre, on remarque que (3) est un modèle où la variable x est projetée linéairement sur p retards d'elle-même et donc u est l'erreur de prévision associée à cette projection.

$$u_t = x_t - \phi_1 x_{t-1} - \phi_2 x_{t-2} + \dots - \phi_p x_{t-p}$$

1.1 processus AR et stationnarité

Dans le paragraphe précédent nous avons supposé que X , et donc x , étaient stationnaires. On s'intéresse maintenant à l'énoncé des conditions assurant cette stationnarité. Pour les mettre en évidence, le plus simple est de relier l'écriture AR(p) à l'écriture de Wold qui, on le sait, existe sur toute stationnaire du second ordre.

Partant de (3), on a :

$$(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p)x_t = u_t \tag{4}$$

$$\Leftrightarrow \phi(L)x_t = u_t \tag{5}$$

où $\phi(L)$ est donc le polynôme en L de degré p caractéristique de l'AR(p). Si ce polynôme est inversible, une équation équivalente à (5) est

$$x_t = \phi(L)^{-1}u_t \tag{6}$$

mais dans (6), le polynôme $\phi(L)^{-1}$ est de degré infini en L : cette équation, dans laquelle u_t est une erreur de prévision associée à des prédicteurs linéaires sur le passé de x , correspond à une écriture de Wold sur x , écriture qui est unique. En résumé (6) est l'écriture de Wold afférente à la variable x : si elle est valide, x est stationnaire. Or pour arriver à (6) on a seulement imposé que $\phi(L)$ soit inversible.

En factorisant le polynôme caractéristique de l'AR(p) sur ses p racines, on a :

$$(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p) = (1 - \omega_1 L)(1 - \omega_2 L) \dots (1 - \omega_p L)$$

En conséquence l'inverse de $\phi(L)$ existe si chacun des polynômes élémentaires est inversible et donc, en conclusion, un AR(p) est stationnaire si les racines de son polynôme caractéristique sont à l'extérieur du disque complexe de rayon unitaire.

On rappelle qu'un processus est inversible s'il a une écriture autorégressive. C'est évidemment le cas des AR(p) qui sont donc toujours inversibles.

2 Le processus AR(1)

Nous allons rechercher les caractéristiques des fonctions d'autocorrélation et d'autocorrélation partielle.

On a donc :

$$X_t = \mu_X + \phi_1 X_{t-1} + u_t, \text{ ou encore}$$

$$x_t = X_t - \mu_X = \phi_1 x_{t-1} + u_t$$

où u est un processus en bruit blanc de variance σ_u^2 . On suppose par la suite que la condition de stationnarité, $|\phi_1| < 1$, est vérifiée.

2.1 fonctions d'autocovariance et d'autocorrélation

Les résultats suivants sont immédiats (et vous devez pouvoir les retrouver sans difficulté) :

$$\begin{aligned}\gamma_0 &= \text{var}(x_t) = \text{var}(\phi_1 x_{t-1} + u_t) = \phi_1^2 \gamma_0 + \sigma_u^2 \\ \gamma_1 &= \text{cov}(x_t, x_{t-1}) = E[x_t x_{t-1}] = E[\phi_1 x_{t-1}^2 + u_t x_{t-1}] = \phi_1 \gamma_0 \\ \gamma_2 &= \text{cov}(x_t, x_{t-2}) = E[x_t x_{t-2}] = E[\phi_1 x_{t-1} x_{t-2} + u_t x_{t-2}] = \phi_1 \gamma_1 = \phi_1^2 \gamma_0 \\ \gamma_3 &= \text{cov}(x_t, x_{t-3}) = E[x_t x_{t-3}] = E[\phi_1 x_{t-1} x_{t-3} + u_t x_{t-3}] = \phi_1 \gamma_2 = \phi_1^3 \gamma_0\end{aligned}$$

et plus généralement,

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} = \phi_1^k \gamma_0 \text{ si } j > 1$$

(dans ces égalités on utilise plusieurs fois le résultat $\text{cov}(u_t, x_{t-j}) = 0, j = 1, 2, 3, \dots$. Vous devez savoir expliquer cette nullité).

On peut noter que la covariance de rang k est liée à celle de rang immédiatement inférieur selon la même relation qui unit le x de rang t et celui de rang $t-1$: $x_t = \phi_1 x_{t-1} + u_t$ d'une part et $\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1}$ d'autre part. Pour finir, comme $\rho_k = \gamma_k / \gamma_0$, la fonction d'autocorrélation du processus AR(1) est donc :

$$\forall k \geq 0, \rho_k = \text{cor}(x_t, x_{t-k}) = \phi_1^k. \quad (7)$$

Comme $\phi_1 \neq 0$ pour avoir un AR(1), et que $-1 < \phi_1 < 1$ pour satisfaire la condition de stationnarité, cette fonction ne s'annule jamais, mais converge vers 0 lorsque k augmente.

2.2 fonction d'autocorrélation partielle

Ayant trouvé la fonction d'autocorrélation, on pourrait calculer les valeurs de la fonction d'autocorrélation partielle via les équations de Yule-Walker. Cependant, si on veut simplement repérer l'évolution de la fonction d'autocorrélation partielle, sans en connaître précisément les valeurs, il suffit de comparer le modèle vrai afférent à x et le modèle autorégressif d'où est tirée la valeur de l'autocorrélation partielle d'ordre k , k quelconque.

Le modèle vrai, qui s'impose à toutes les écritures autorégressives est donc :

$$x_t = \phi_1 x_{t-1} + u_t \quad (8)$$

- la corrélation partielle de rang 1, Φ_{11} : elle apparaît dans l'écriture : $x_t = \phi_{11} x_{t-1} + v_t$. Comparée à (8), il vient immédiatement, $\Phi_{11} = \phi_1 \neq 0$ et $v_t = u_t$.
- la corrélation partielle de rang 2, Φ_{22} : elle est tirée de $x_t = \phi_{11} x_{t-1} + \phi_{22} x_{t-2} + v_t$. Compte-tenu de (8), on a $\Phi_{11} = \phi_1 \neq 0, \Phi_{22} = 0$ et $v_t = u_t$.
- Le raisonnement mené pour ϕ_{22} peut être repris pour tout $k \geq 2$: dès que l'on a dépassé l'ordre du modèle vrai, ici 1, les coefficients des x retardés sont nuls, et donc en particulier $\phi_{kk} = 0$.

Ainsi, pour un AR(1), la fonction d'autocorrélation partielle s'annule au-delà du premier retard.

La figure 1 illustre ces premiers résultats.

3 Le processus AR(2)

Ici la variable X_t s'écrit sur deux valeurs retardées d'elle-même :

$$X_t = c + \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + u_t, \text{ ou encore} \quad (9)$$

$$x_t = X_t - \mu_X = \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + u_t \quad (10)$$

avec $E[X_t] = \mu_X = \frac{c}{1-\phi_1-\phi_2}$ constante.

On va dérouler la démarche habituelle : calcul des autocovariances pour trouver sa fonction d'autocorrélation puis étude de sa fonction d'autocorrélation partielle.

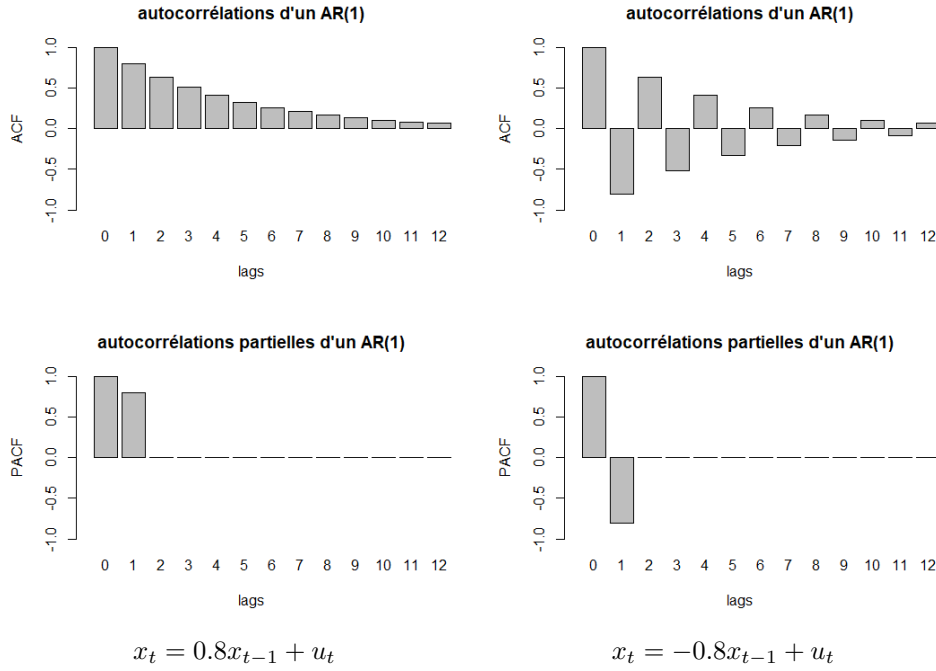


FIGURE 1 – Exemples de corrélogrammes associés à des AR(1)

3.1 fonctions d'autocovariance et d'autocorrélation

Pour la fonction d'autocovariance :

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \text{var}(x_t) = E[x_t x_t] = E[\phi_1 x_{t-1} x_t + \phi_2 x_{t-2} x_t + u_t x_t] = \phi_1 \gamma_1 + \phi_2 \gamma_2 + E[u_t(\phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + u_t)] = \phi_1 \gamma_1 + \phi_2 \gamma_2 + \sigma_u^2 \\ \gamma_1 &= \text{cov}(x_t, x_{t-1}) = E[x_t x_{t-1}] = E[\phi_1 x_{t-1}^2 + \phi_2 x_{t-2} x_{t-1} + u_t x_{t-1}] = \phi_1 \gamma_0 + \phi_2 \gamma_1 \\ \gamma_2 &= \text{cov}(x_t, x_{t-2}) = E[x_t x_{t-2}] = E[\phi_1 x_{t-1} x_{t-2} + \phi_2 x_{t-2}^2 + u_t x_{t-2}] = \phi_1 \gamma_1 + \phi_2 \gamma_0, \text{ et plus généralement :} \\ \gamma_k &= \phi_1 \gamma_{k-1} + \phi_2 \gamma_{k-2}, \quad k = 1, 2, 3 \dots \end{aligned}$$

En conséquence sa fonction d'autocorrélation est :

$$\begin{aligned} \rho_0 &= 1 \\ \rho_1 &= \phi_1 + \phi_2 \rho_1 \Rightarrow \rho_1 = \frac{\phi_1}{1 - \phi_2} \\ \rho_2 &= \phi_1 \rho_1 + \phi_2 \Rightarrow \rho_2 = \frac{\phi_1^2}{1 - \phi_2} + \phi_2 \\ \rho_k &= \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} \text{ pour } k > 2 \end{aligned}$$

Comme pour le MA(1), la relation de récurrence qui relie la corrélation de rang k aux deux corrélations de rangs $k-1$ et $k-2$ est identique à celle qui existe entre x_t et les deux x qui le précèdent. On remarque qu'une fois trouvées les deux premières corrélations ρ_1 et ρ_2 en fonction des coefficients du processus, toutes les autres valeurs ρ_k pour $k > 2$ peuvent être calculées. Compte-tenu de l'équation de récurrence, ces valeurs ne s'annuleront pas, mais elles vont converger vers zéro avec k , la convergence étant de type exponentielle si les racines du polynôme caractéristique de l'AR(2) sont réelles, de type sinusoïdale si elles sont complexes.

3.2 fonction d'autocorrélation partielle

Comme pour le processus AR(1), il suffit de comparer le vrai modèle et celui dans lequel est définie l'autocorrélation partielle pour conclure sur la valeur de ses dernières dès que $k \geq 2$. Ici, x_t est gouvernée par :

$$x_t = \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + u_t \tag{11}$$

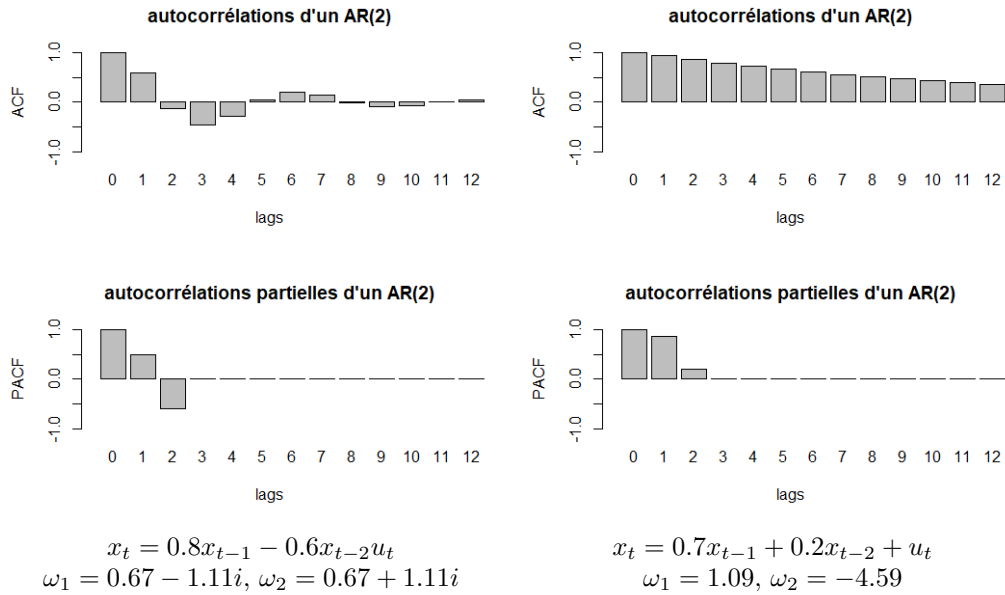


FIGURE 2 – Exemples de corrélogrammes associés à des AR(2)

- à l'ordre 1, $\phi_{11} = \rho_1$,
- à l'ordre 2, ϕ_{22} est définie par $x_t = \phi_{21}x_{t-1} + \phi_{22}x_{t-2} + v_t$. En rapprochant cette équation de (11), on a immédiatement : $\phi_{22} = \phi_2$, avec également, $\phi_{21} = \phi_1$ et $v_t = u_t$.
- à l'ordre 3, ϕ_{33} apparaît dans $x_t = \phi_{31}x_{t-1} + \phi_{32}x_{t-2} + \phi_{33}x_{t-3} + v_t$. Mais comme x_t doit obéir à (11), on peut conclure que $\phi_{33} = 0$, et que par ailleurs $\phi_{31} = \phi_1, \phi_{32} = \phi_2$ et $v_t = u_t$.
- plus généralement, le même raisonnement aboutit à $\phi_{kk} = 0$ si $k > 2$: La fonction d'autocorrélation partielle s'annule dès que l'on a dépassé l'ordre du modèle vrai.

La figure 2 présente des exemples de corrélogrammes caractéristiques des AR(2).

4 Le processus AR(p)

On se contente d'énoncer les principales caractéristiques des AR(p), sachant que vous devez être en mesure de les expliquer :

- un AR(p) est stationnaire si les p racines de son polynôme caractéristique sont en dehors du disque complexe unitaire.
- un AR(p) est toujours inversible.
- sa fonction d'autocorrélation décroît régulièrement vers zéro de façon exponentielle, si ses racines sont réelles, ou sinusoïdale, si ses racines sont complexes.
- sa fonction d'autocorrélation partielle s'annule pour les retards supérieurs à la longueur de l'AR, p .