Correction de l'Examen
Séries Temporelles Multivariées

Gilbert Colletaz

mai 2017 - Durée 3 heures

1 Exercices

1. — Sous l'hypothèse énoncée, on a : $\Delta y_t = \Pi y_{t-1} + u_t = \alpha\beta^\top y_{t-1} + u_t$, avec $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)^\top$, $\beta = (\beta_1, \beta_2)^\top$ et où l'erreur d'équilibre de long terme serait $z_t = \beta^\top y_t$. Il vient donc :

$$\begin{aligned}
\Delta y_t &= \alpha\beta^\top y_{t-1} + u_t \\
\Leftrightarrow y_t &= (I + \alpha\beta^\top) y_{t-1} + u_t \\
\Rightarrow \beta^\top y_t &= (\beta^\top + \beta^\top\alpha\beta^\top) y_{t-1} + \beta^\top u_t \\
\Leftrightarrow \beta^\top y_t &= (1 + \beta^\top\alpha)\beta^\top y_{t-1} + \beta^\top u_t \\
\Leftrightarrow z_t &= (1 + \beta^\top\alpha) z_{t-1} + \beta^\top u_t \\
\Leftrightarrow z_t &= \phi z_{t-1} + v_t
\end{aligned}$$

   où $v_t = \beta_1 u_{1t} + \beta_2 u_{2t}$ est un bruit blanc. z_t est donc gouvernée par un AR(1).

   — Dans ce cas, on a $\beta = (1, -1)^\top$ et $\phi = 1 + \alpha_1 - \alpha_2$, et le VECM adapté s'écrit :

$$\begin{aligned}
\Delta y_{1t} &= \alpha_1 (y_{1t-1} - y_{2t-1}) + u_{1t} \\
\Delta y_{2t} &= \alpha_2 (y_{1t-1} - y_{2t-1}) + u_{2t}
\end{aligned}$$

   Pour z_t soit $I(0)$, il faut que $|\phi| < 1$, soit $|1 + \alpha_1 - \alpha_2| < 1$, *i.e.* que $-2 < \alpha_1 - \alpha_2 < 0$.

2. Cet exercice est repris au Professeur Julia Schaumburg, cours d'économétrie II, Econometric Theory and Methods, Université d'Amsterdam, 2015.

   (a) On a

$$\begin{pmatrix} 1 - (1+\rho)L & 0 \\ -\kappa L & 1 - \delta L \end{pmatrix} y_t = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + v_t$$

   et donc

$$\begin{vmatrix} 1 - (1+\rho)L & 0 \\ -\kappa L & 1 - \delta L \end{vmatrix} = [1 - (1+\rho)L]\ [1 - \delta L]$$

dont les racines sont des réels égaux à $(1+\rho)^{-1}$ et δ^{-1}. Pour la stabilité, il faut que ces racines soient en module supérieures à 1, soit $|\delta| < 1$ et $-2 < \rho < 0$. Aucune condition n'est à mettre sur κ.

(b) Comme le système est stationnaire, $\forall t\, E[y_t] = (\mu_1, \mu_2)$, ainsi en prenant l'espérance du processus, il vient immédiatement :

$$\begin{pmatrix}\mu_1\\ \mu_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}(1+\rho) & 0\\ \kappa & \delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mu_1\\ \mu_2\end{pmatrix}$$

d'où :

$$\begin{aligned}-\rho\mu_1 &= c_1, \texttt{et}\\ \mu_2 &= c_2 + \kappa\mu_1 + \delta\mu_2\end{aligned}$$

avec $c_1 = -\rho$, on a évidemment $\mu_1 = 1$. La seconde équation donne alors $(1-\delta)\mu_2 = c_2 + \kappa$. Cette dernière égalité, lorsque $c_2 = 1 - \delta - \kappa$, équivaut à $(1-\delta)\mu_2 = 1 - \delta$ et donc $\mu_2 = 1$. En conséquence ici, $E[y_t] = (1,1)^\top$.

(c) Dans ce modèle l'inflation cause le chômage si $\kappa \neq 0$, *i.e.* si le coefficient du taux d'inflation retardé dans l'équation du taux de chômage est nul. En revanche le taux de chômage ne cause pas l'inflation selon Granger.

(d) La matrice de variance-covariance des résidus du VAR étant diagonale, les fonctions de réponse simples et orthogonalisées sont égales. Il suffit donc de prendre l'écriture VMA du VAR initial. Soit :

$$\begin{aligned}y_t &= \begin{pmatrix}1-(1+\rho)L & 0\\ -\kappa L & 1-\delta L\end{pmatrix}^{-1}\left[\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}v_{1t}\\ v_{2t}\end{pmatrix}\right]\\ &= \begin{pmatrix}(1-(1+\rho)L)^{-1} & 0\\ \Delta^{-1}\kappa L & (1-\delta L)^{-1}\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}v_{1t}\\ v_{2t}\end{pmatrix}\right]\\ &= \begin{pmatrix}\sum_{i=0}^{\infty}(1+\rho)^i L^i & 0\\ \kappa L\sum_{i=0}^{\infty}(1+\rho)^i L^i \sum_{i=0}^{\infty}\delta^i L^i & \sum_{i=0}^{\infty}\delta^i L^i\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}v_{1t}\\ v_{2t}\end{pmatrix}\right]\end{aligned}$$

avec $\Delta = (1-(1+\rho)L)(1-\delta L)$.

— Ainsi les 3 premiers coefficients de réponse de l'inflation à un choc unitaire sur v_1 sont $1, (1+\rho), (1+\rho)^2$, et la réponse de l'inflation à un choc sur v_2 est nulle.

— Les 3 premiers coefficients de réponse du chômage à un choc unitaire sur v_2 sont respectivement, $1, \delta, \delta^2$. Les 3 premiers coefficients du chômage à un choc unitaire affectant v_1 sont : $0, \kappa, \kappa(1+\rho+\delta)$.

(e) i. On a maintenant une équation de la forme $y_{t+1} = My_t + v_{t+1}$, d'où $y_{t+2} = M^2 y_t + Mv_{t+1} + v_{t+2}$. En conséquence,

$$\begin{aligned}E_t[y_{t+1}] &= My_t \;\texttt{et,}\\ E_t[y_{t+2}] &= M^2 y_t\end{aligned}$$

Avec $M^2 = \begin{pmatrix} (1+\rho)^2 & 0 \\ \kappa(1+\rho)+\delta\kappa & \delta^2 \end{pmatrix}$ et $y_T = (0, \gamma)$, on obtient une prévision pour y en $T+2$ égale à $(0, \delta^2\gamma)$.

ii. On vient de montrer que l'erreur de prévision à deux périodes sur y est $Mv_{t+1} + v_{t+2}$. Le chômage correspondant à la deuxième ligne de ce système a une erreur égale à $\kappa v_{1,t+1} + \delta v_{2,t+1} + v_{2,t+2}$. la variance des erreurs de prévisions sur le chômage à un horizon de deux périodes est donc égale à $\kappa^2\sigma_1^2 + (1+\delta^2)\sigma_2^2$.

L'intervalle de confiance à 95% sur le chômage serait alors : $\delta^2\gamma \pm 2\sqrt{\kappa^2\sigma_1^2 + (1+\delta^2)\sigma_2^2}$.

3. (a) On recherche un rang de cointégration au moyen du test de la trace de Johansen. Ce test est réalisé dans le premier tableau avec une constante hors de l'espace de cointégration et avec la constante dans l'espace de cointégration dans le second. Quelle que soit la configuration retenue, on rejette l'hypothèse d'un rang nul versus un rang strictement positif, puis on rejette également l'hypothèse d'un rang égal à l'unité versus un rang supérieur à 1. En revanche on ne rejette pas l'hypothèse $H0 : r = 2$ opposée à $H1 : r > 2$, soit encore, avec 3 variables, $H1 : r = 3$, hypothèse qui contraindrait les 3 variables à être I(0). A l'issue de cette étape, on retiendrait donc l'existence de deux relations de cointégration. Avec $k = 3$ et $r = 2$, on aurait des matrices α et β de dimensions 3×2 lorsque la constante est en dehors de l'espace (cas correspondant au tableau intitulé "Cointégration Rank Test Using Trace") et de dimensions toujours 3×2 pour α mais 4×2 pour β dans l'autre configuration (correspondant au tableau intitulé "Cointégration Rank Test Using Trace Under Restriction").

(b) La dernière de ces tables réalise un test portant sur l'emplacement de la constante. Sous H0, elle est dans l'espace de cointégration, sous H1 elle est contrainte à être en dehors. La conclusion de ce test diffère selon le nombre de vecteurs cointégrants, mais après la question précédente, on travaillerait avec $r = 2$ et, avec une *p-value* égale à 0.1963, on ne rejette alors pas la nulle. Cette conclusion est évidemment raisonnable : elle autorise la présence d'une prime moyenne constante différenciant le niveau des taux d'intérêt de diverses échéances alors que son rejet aurait signifié la présence d'un trend déterministe dans ces mêmes niveaux ce qui est difficilement compréhensible théoriquement.

(c)

$$
\begin{aligned}
&\Delta Euribor\_1\_mois_t = \alpha_{21}\times \\
&\quad(\beta_{1,1}EONIA_{t-1} + \beta_{2,1}Euribor\_1\_mois_{t-1} + \beta_{3,1}Euribor\_12\_mois_{t-1} + \beta_{4,1})+ \\
&\alpha_{22}\times \\
&\quad(\beta_{1,2}EONIA_{t-1} + \beta_{2,2}Euribor\_1\_mois_{t-1} + \beta_{3,2}Euribor\_12\_mois_{t-1} + \beta_{4,2}) \\
&\quad +_1 \Phi^*_{2,1}\Delta EONIA_{t-1} +_1 \Phi^*_{2,2}\Delta Euribor\_1\_mois_{t-1} +_1 \Phi^*_{2,3}\Delta Euribor\_12\_mois_{t-1} \\
&\quad +_2 \Phi^*_{2,1}\Delta EONIA_{t-2} +_2 \Phi^*_{2,2}\Delta Euribor\_1\_mois_{t-2} +_2 Phi^*_{2,3}\Delta Euribor\_12\_mois_{t-2} \\
&\quad +_3 \Phi^*_{2,1}\Delta EONIA_{t-3} +_3 \Phi^*_{2,2}\Delta Euribor\_1\_mois_{t-3} +_3 Phi^*_{2,3}\Delta Euribor\_12\_mois_{t-3} \\
&+u_{2t}
\end{aligned}
$$

(d) Les taux sur cette période sont négatifs : pour pouvoir prêter de l'argent le prêteur doit rémunérer l'emprunteur qui touche donc des intérêts. On rappelle que ces taux d'intérêt concerne les banques : cette pratique est interdite pour les particuliers.

Variable	Type	N	Mean	Standard Deviation	Min	Max	Label
eonia	Dependent	335	-0.32780	0.03909	-0.36000	-0.22700	Taux de l'Eonia (moyenne mensuelle)
EURIBOR___1_mois	Dependent	335	-0.34608	0.04562	-0.37500	-0.21000	EURIBOR à 1 mois
EURIBOR___12_mois	Dependent	335	-0.05145	0.04296	-0.12400	0.05900	EURIBOR à 12 mois

Cointegration Rank Test Using Trace

H0: Rank=r	H1: Rank>r	Eigenvalue	Trace	Pr > Trace	Drift in ECM	Drift in Process
0	0	0.1562	89.0722	<.0001	Constant	Linear
1	1	0.0933	32.6704	0.0002		
2	2	0.0004	0.1367	0.7113		

Cointegration Rank Test Using Trace Under Restriction

H0: Rank=r	H1: Rank>r	Eigenvalue	Trace	Pr > Trace	Drift in ECM	Drift in Process
0	0	0.2026	110.4335	<.0001	Constant	Constant
1	1	0.0959	35.2791	0.0002		
2	2	0.0054	1.8064	0.8156		

Hypothesis of the Restriction

Hypothesis	Drift in ECM	Drift in Process
H0(Case 2)	Constant	Constant
H1(Case 3)	Constant	Linear

Hypothesis Test of the Restriction

Rank	Eigenvalue	Restricted Eigenvalue	DF	Chi-Square	Pr > ChiSq
0	0.1562	0.2026	3	21.36	<.0001
1	0.0933	0.0959	2	2.61	0.2714
2	0.0004	0.0054	1	1.67	0.1963